EXERCICE 1

On considère les applications f et g définies par

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 2z + i \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 3 + \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} z \end{array}$$

On dit que $z \in \mathbb{C}$ est **invariant** par f si, et seulement si, $f(z) = z$.

1. Déterminer les points invariants par f, puis déterminer si f définit une rotation / une homothétie, et donner le centre et l'angle / le rapport de f le cas échéant.

2. Déterminer les points invariants par g, puis déterminer si g définit une rotation / une homothétie, et donner le centre et l'angle / le rapport de g le cas échéant.

EXERCICE 2

On considère l'application f définie par

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 + 2iz - 2i \end{array}$$

1. Soit $w \in \mathbb{C}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ où l'inconnue est z.
L'application est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2. Trouver les nombres complexes z tels que

$$z^2 + (2i - 1)z - 2i = 0$$

3. En déduire l'ensemble $\mathscr{A} = \{z \in \mathbb{C}, f(z) = z\}$ des points invariants par f.

4. Soit g l'application définie par

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto iz - i + 1 \end{array}$$

Montrer que g est bijective et déterminer la bijection réciproque g^{-1}.

5. Déterminer l'ensemble $g^{-1}(\mathscr{A})$.

6. Donner une interprétation géométrique de l'application g.

T.S.V.P.

EXERCICE 3

Montrer que pour tout $x \in \left]0;1\right]$, $2\operatorname{Arc}\tan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right) + \operatorname{Arc}\sin\left(2x-1\right) = \dfrac{\pi}{2}$

EXERCICE 4

1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h\left(x\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

a) Etudier les variations de h.

b) Etudier les limites de $h(x)$ aux bornes du domaine de définition.

c) Dresser le tableau complet des variations de h, et en déduire le signe de $h(x)$ sur son domaine.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g\left(x\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

a) Etudier les variations de g.

b) Etudier les limites de $g(x)$ aux bornes du domaine de définition.

c) Dresser le tableau de variations de g.

EXERCICE 5

On considère la fonction F définie sur $\left[0;1\right[$ par

$$F\left(x\right) = \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall x \in \left[0;1\right[,\quad F\left(x\right) = -x\sqrt{1-x^2} + \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Calculer $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable, et en déduire $F(x)$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} F\left(x\right)$.