EXERCICE 1

1. Après en avoir donné la signification (littérale), donner la négation de l'assertion suivante:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x<y) \Rightarrow \left(f(x) > f(y)\right),$$

où f désigne une fonction réelle.

2. On considère l'assertion A : « noir et blanc donnent du gris », formalisée par :

$$\mathrm{N} \wedge \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{G}$$

On notera $\overline{\mathrm{P}}$ la négation d'une assertion P.

a) Donner la contraposée (formelle) de l'assertion A.

b) Donner la négation (formelle) de A.

3. Montrer l'assertion suivante :

$$\left(x^2 > x\right) \Rightarrow \left((x<0) \vee (x>1)\right)$$

4. f désigne une fonction réelle croissante sur $\mathbb{R}$. La suite $\left(U_n\right)$ est définie par son premier terme U_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f\left(U_n\right)$. On suppose que $U_0 > U_1$.

Montrer par récurrence alors la suite $\left(U_n\right)$ est décroissante.

EXERCICE 2

Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

2. $\cos(2x) - \sin(2x) = 0$

3. $\cos x + \sqrt{3}\sin x + \sqrt{2}\cos(2x) - \sqrt{2}\sin(2x) = 0$

4. $\dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

EXERCICE 3

1. Donner les solutions complexes de l'équation $Z^4 = 1$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$\left(z^2+1\right)^4 = (z-3)^4 \quad \text{(E)}$$

T.S.V.P.

EXERCICE 4

Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation :

$$x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln x} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

1. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln x + \ln 2$.

a) Donner le domaine de définition de *f*, et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.

b) Etudier les variations de *f*, et dresser son tableau de variations complet.

c) Déterminer, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On donne $\ln 2 \simeq 0,69$ et $\frac{1}{e} \simeq 0,36$.

2. On va déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = \frac{1}{n^2}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que :

$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow n^2 = 2^n$$

b) En déduire, par l'absurde, que *n* est pair puis, en posant $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$, que $2^{p-1} = p$.

c) Trouver deux solutions évidentes à cette dernière équation, et en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation (1).

EXERCICE 5

1. Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, que :

$$\forall a \in [0;1],\ a(1-a)^2 \leq \frac{4}{27}$$

2. Soit *a* un réel de [0 ; 1]. On pose $f_a : x \mapsto -ax^2 + a(1-a)x$.

a) Déterminer le maximum de f_a sur $[0 ; 1 - a]$.

b) En déduire la propriété suivante :

si *a*, *b*, *c* sont trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$ alors $abc \leq \frac{1}{27}$.

c) Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

3. En utilisant l'inégalité précédente, montrer que, pour tous réels positifs *x*, *y*, *z* on a :

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

4. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si $x = y = z$.