TD 24 : Applications linéaires et matrices

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x+3y-z, 3y-z, 5z)$.

1/ Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

2/ Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

3/ Montrer que f est un automorphisme, puis déterminer sa réciproque.

Exercice 2

Soit u l'application de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}$ définie par $u(x,y,z,t) = x - t$.

1/ Montrer que u est une forme linéaire.

2/ Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

3/ u est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 3

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$

1/ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = e_1 - e_2; f(e_2) = e_1 + e_2$. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

2/ Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ définie par $f(e_1) = e_1 - e_2; f(e_2) = 2e_1 - 2e_2$. $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3/ Les applications f puis g sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

Exercice 4

Soit $$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = f'' - 3f' + 2f \end{array}$$

Démontrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 5

Soient E un $\mathbf{K}$-e.v. et $f, g \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{Im} f \subset \ker g$.
2. Comparer, au sens de l'inclusion, $\ker f$ et $\ker f^2$.
3. Comparer, au sens de l'inclusion, $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^2$.

Exercice 6

Soient E un $\mathbf{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\} \iff \ker f^2 = \ker f$.

Exercice 7

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ définis par : $f((x,y)) = (y,x)$ et $g((x,y)) = (x+y, 2x)$.

On admettra que f et g sont linéaires.

1. Montrer que f et g sont des isomorphismes de $\mathbf{R}^2$ puis déterminer f^{-1} et g^{-1}.

2. On note $h = f \circ g - g \circ f$. Justifier que $h \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$.

3. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

4. h est-elle injective ?

5. h est-elle surjective ?

Exercice 8

Soit u l'application de $E = \mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^4$ définie par :

$u\,(x, y, z, t)) = (2x + 9z - 9t, 2y + 3z - 3t, 5z - 3t, 6z - 4t)$.

On note id l'application identité sur $\mathbf{R}^4$.

On admettra que u est linéaire.

1. (a) Prouver que $u^2 - u - 2\mathrm{id}_E = 0_{E^E}$.

   (b) Démontrer que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^4$.

   (Il y a au moins 5 méthodes pour le démontrer ...)

2. (a) Déterminer $\ker(u - 2\mathrm{id})$ puis $\ker(u + \mathrm{id})$.

   (b) En déduire que $E = \ker(u - 2\mathrm{id}) \oplus \ker(u + \mathrm{id})$.

3. On ne servira pas de la question 2 ; pour faire la question 3.

   (a) On pose $f = u - 2\mathrm{id}_E$ et $g = u + \mathrm{id}_E$.

   Prouver que $f \circ g = g \circ f = 0_{E^E}$.

   (b) Prouver que $E = \ker(f) \oplus \ker(g)$.

Exercice 9

Soit E un $\mathbf{K}$-e.v. de dimension finie, V un s.e.v. de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer que : $V \subset f(V) \Rightarrow f(V) = V$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\Delta : \mathbf{K}_{n+1}[X] \to \mathbf{K}_n[X]$ l'application définie par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$

1. Montrer que Δ est bien définie et que Δ est une application linéaire.

2. Déterminer le noyau de Δ.

3. En déduire que cette application est surjective.

Exercice 11

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-e.v. E de dimension finie. Démontrer que l'on a équivalence entre :

1. $\mathrm{Im}f$ et $\ker f$ supplémentaires dans E

2. $E = \mathrm{Im}f + \ker f$

3. $\mathrm{Im}f^2 = \mathrm{Im}f$

4. $\ker f^2 = \ker f$

Exercice 12

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ définie par $f((x,y,z)) = (x-y, -x+y+z, 3z)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer une base de chaque s.e.v. : $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}(f-3\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
3. En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice D de f est diagonale.
4. Exprimer A en fonction de D. En déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 13

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Par la méthode du pivot de Gauss, déterminer le rang de f. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Trouver une relation de dépendance entre les vecteurs colonnes de M. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Déterminer des équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
4. Démontrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$, puis déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 14

Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, et en déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ (sans utiliser la question suivante).
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, une base de $\mathrm{Im}(f)$, et vérifier le résultat précédent.
3. On cherche une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbf{R}^3$ telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(*)$.

   Justifier que $b_2 \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$, puis déterminer une base $\mathcal{B}$ permettant de vérifier $(*)$.

Exercice 15

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.
2. Donner une base du noyau et une base de l'image de f.
3. Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3[X]$ telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Calculer $f^3(1+2X-3X^2)$.

Exercice 16

On considère trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par leurs premiers termes x_0, y_0, z_0 et les relations de récurrence suivantes : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(-x_n - 3y_n + 6z_n\right) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + 5y_n - 6z_n\right) \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + 3y_n - 4z_n\right) \end{cases}$

1. Démontrer que ce système peut s'écrire sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et X_{n+1}, X_n sont des matrices colonne.
2. Déterminer $S_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) / AX = X\}$ et $S_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R}) / AX = -2X\}$.
3. Démontrer que S_1 et S_{-2} sont des s.e.v. de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ et en déterminer des bases.
4. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Calculer A^n et en déduire X^n en fonction de X_0.

Exercice 17

On se place dans $\mathbf{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

1. Soient $x_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $x_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$ et $x_3 = -e_1 + 3e_2$ trois vecteurs.

   Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((x_1, x_2, x_3))$ matrice de la famille (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$,

   puis déterminer $\mathrm{rg}(x_1, x_2, x_3)$.
2. Soient $y_1(2,1,0)$, $y_2(2,3,-2)$ et $y_3(2,-1,2)$.

   Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((y_1, y_2, y_3))$,

   puis déterminer $\mathrm{rg}(y_1, y_2, y_3)$.

Exercice 18

Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée (la linéarité sera admise) :

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-3z, x-2y-z, -x+y+3z) \end{array}$
2. $T : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP + 2P' \end{array}$
3. $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{Exercice 19}}$

Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice, dans les bases canoniques (I, J, K, L) et (i, j, k) est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit deux nouvelles bases $\mathcal{B} = (I, J, 4I + J - 3L, -7I + K + 5L)$ et $\mathcal{C} = (4i + 2j + k, 5i + j - k, k)$.

Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 20}}$

1. Écrire la matrice de l'application linéaire suivante dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$

   (la linéarité sera admise) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-5x + 2y - z, 4x - 3y - 2z, x + y + 3z) \end{array}$$

2. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, puis si f est bijective déterminer son inverse sinon déterminer $\ker(f)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 21}}$

1. Écrire la matrice de l'application linéaire suivante dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$

   (la linéarité sera admise) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-3x - y + 5z, -x + 3y + 2z, 2x - 2y - 2z) \end{array}$$

2. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$, puis si f est bijective déterminer son inverse sinon déterminer $\ker(f)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 22}}$ (exercice plus axé sur une révision du chapitre, ne pas le faire de suite)

Soit $T : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (2X + 1)P + (1 - X^2)P' \end{array}$.

En utilisant le point de vue matriciel, on veut déterminer $T^{-1}(P)$ pour tout $P \in \mathbf{R}_2[X]$.

1. Prouver que T est un endomorphisme.
2. Écrire la matrice A de T dans la base canonique.
3. Prouver que T est un automorphisme et calculer A^{-1}.
4. Conclure.