EXERCICE 1 :

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!$.

EXERCICE 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

EXERCICE 3 :

Soit (H_n) la suite définie par $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

1. Comparer $\ln(1+x)$ et x. Montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
2. Soit (u_n) une suite telle que $n(u_{n+1}-u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

EXERCICE 4 :

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier que
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$
2. Déterminer la limite de (S_n).
3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.
4. Donner un équivalent simple de (S_n).

EXERCICE 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad \text{et} \qquad S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1. Prouver que pour tout $p > 1$,
$$\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
En déduire la limite de la suite (S_n).

2. Établir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de (S'_n).