Table des matières

Chapitre 22

Séries numériques

Le but de ce chapitre est de donner un sens à la sommation d'une infinité de termes réels ou complexes, par exemple :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

égalité que les mathématiciens grecs interprètent par :

« La flèche va-t-elle atteindre le talon d'Achille ? »

et

$$0,999\,9\cdots9\cdots=1$$

égalité qui provient du développement décimal d'un nombre réel.

En physique, le théorème de Fourier montre qu'un signal périodique de fréquence ν, par exemple le la d'une flûte, est la somme d'une combinaison linéaire d'un nombre infini de signaux périodiques élémentaires (de sons élémentaires) de fréquences $n\nu$, multiples entiers de cette fréquence ν dite fondamentale.

1 Séries à termes dans K

Dans tout ce chapitre $\mathbf{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1 Définitions de base

Définition 1.1 (Série)**.**
Soit (u_n) *à valeurs dans* $\mathbf{K}$*. On appelle* série de terme général u_n *la suite* (S_n) *définie par :*

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$$

S_n *est appelé la* somme partielle de rang n *de la série de terme général* u_n*.*

Définition 1.2 (Convergence et divergence d'une série).

- *On dit que la série* $\sum u_n$ *est* convergente *si la suite* (S_n) *est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série* $\sum u_n$ *est* divergente .
- *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente, on appelle somme de la série le scalaire* $S = \lim_n S_n$ *qu'on notera* $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$*,* n *joue le rôle d'un indice muet.*

Attention

Il ne faut pas confondre les notations $\sum u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ qui désignent respectivement une série et la somme d'une série (dans le cas où celle ci est convergente).

Exemples 1.1.

1. *La série* $\sum \frac{1}{n}$ *est une série divergente car* $S_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n \underset{n}{\sim} \ln n$ *et donc* $S_n \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$. $\sum \frac{1}{n}$ *est divergente.*
2. *la série* $\sum q^n$ *est convergente si, et seulement si* $|q| < 1$ *et en cas de convergence la somme* $S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Définition 1.3.
On dit que deux séries sont de même nature *si les deux séries sont simultanément convergentes ou divergentes.*

Définition 1.4 (Reste d'ordre N d'une série convergente).
Soit $\sum u_n$ *une série convergente. On appelle* reste d'ordre N *de la série* $\sum u_n$ *le scalaire :*

$$R_N = S - S_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k = \lim_p \sum_{k=N+1}^{p} u_k$$

Remarques.

- *Par définition de la convergence,* $\lim_n R_n = 0$ *. La réciproque est fausse, parfois elle n'a pas de sens.*
- *L'unicité de la limite d'une suite implique l'unicité de la somme d'une série convergente.*
- *On ne modifie pas la nature d'une série en changeant la valeur d'un nombre fini de termes de celle ci ; par contre, s'il y a convergence de la série, la somme est en général modifiée.*
- *Un réaménagement d'une série (* i.e.*une modification de l'ordre des termes) peut modifier la nature de la série et même la somme en cas de convergence. Par exemple, un réaménagement de la série convergente* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *nous donne une série divergente.*

1.2 Propriétés des séries convergentes

Proposition 1.1 (Convergence des séries parties réelle et imaginaire).
La série à termes complexes $\sum u_n$ *est convergente si, et seulement si, les deux séries à termes réels* $\sum \mathrm{Re}\,e(u_n)$ *et* $\sum \mathrm{Im}\,m(u_n)$ *sont convergentes et dans ce cas :*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}\,e(u_k) + i \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}\,m(u_k)}$$

Exercice 1.1. *Étudiez la nature de la série* $\sum \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ *; en déduire la nature des séries* $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}$ *et* $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}$ *ainsi que leurs sommes respectives.*

Théorème 1.1 (Condition NÉCESSAIRE de convergence).
Si la série $\sum u_n$ *est convergente, alors la suite* (u_n) *tend vers 0 ; la réciproque est FAUSSE.*
Si la suite (u_n) *ne converge pas vers 0, la série* $\sum u_n$ *est divergente on dit que la série* diverge grossièrement.

Exemple 1.2. *La série* $\sum 1/n$ *est une série divergente alors que* $1/n \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 1.2 (Combinaison linéaire de séries convergentes).
Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries , à valeurs dans* $\mathbf{K}$*, et* convergentes *; alors, pour tout* $\lambda \in \mathbf{K}$ *la série* $\sum(\lambda u_n + v_n)$ *est convergente et on a l'égalité :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Ainsi, l'ensemble des séries convergentes à valeurs dans $\mathbf{K}$ *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel .*

Remarques.

— *Si* $\lambda \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$*, les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum \lambda u_n$ *sont de même nature.*

— *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ne sont pas de même nature, alors la série* $\sum(u_n + v_n)$ *est divergente.*

— *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont divergentes, on ne peut rien affirmer* a priori *quant à la nature de la série* $\sum(u_n + v_n)$.

Théorème 1.1 (Nature des séries géométriques).
Soit $x \in \mathbf{C}$*, alors* $\sum x^n$ *converge si, et seulement si,* $|x| < 1$.

Théorème 1.3 (Étude d'une suite ramenée à l'étude d'une série)**.**

Soit (u_n) *une suite à valeurs dans* $\mathbf{K}$*, elle est de même nature que la la série* $\sum (u_{n+1} - u_n)$*. En cas de convergence :*

$$\lim_n u_n = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$$

Exemples 1.3.

— *Considérons la série* $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$ *: on a* $u_n = \ln\big(1 + 1/n\big) = \ln(n+1) - \ln(n) = v_{n+1} - v_n$ *et* $S_n = \sum_{k=1}^{n} = v_{n+1} - v_0 = \ln(n+1)$ *tend vers* $+\infty$.

$$\text{La série } \sum \ln(1 + \frac{1}{n}) \text{ est donc divergente}$$

— *La série* $\sum 1/\big(n(n+1)\big)$ *: on a* $u_n = 1/\big(n(n+1)\big) = -1/(n+1) - 1/n$ *et* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = v_{n+1} - v_1 = 1 - 1/(n+1)$ *tend vers 1.*

$$\text{La série } \sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ est convergente et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Attention

— *Étudier une série* $\sum u_n$, c'est d'abord *déterminer sa nature* : convergence ou divergence ; puis, étudier le *comportement* de (S_n) en cas de divergence, ou déterminer la *valeur exacte* ou *approchée* de la somme et obtenir des renseignements sur la *vitesse de convergence* vers 0 de la suite des restes d'ordre n en cas de convergence.

— On *ne modifie pas la nature* de la série $\sum u_n$ en changeant un nombre fini de termes : on ajoute une constante à S_n à partir d'un certain rang ; par contre, on modifie la somme de cette série en cas de convergence.

— On peut *supprimer les termes nuls* d'une série sans en modifier ni la nature, ni la somme : $\sum \big(1+(-1)^n\big)/n$ s'écrit aussi $\sum 2/(2p)$. Par contre, regroupement de termes et modification de l'ordre des termes ne peuvent s'effectuer *sans précaution*.

2 Les séries à termes positifs

Avant - propos

— Les résultats sur la nature des séries restent valables si les hypothèses $u_n \geqslant 0$ ou $u_n \geqslant v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont remplacées par $u_n \geqslant 0$ ou $u_n \geqslant v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N_0$.

— Compte tenu du fait que les séries $\sum u_n$ et $\sum -u_n$ sont de même nature, les énoncés qui suivront s'appliquent aussi bien aux séries à termes positifs qu'aux séries à termes négatifs.

— Les propriétés des séries positives sont utiles pour étudier la convergence absolue des séries dans $\mathbf{K}$.

2.1 Le théorème fondamental

Théorème 2.1 (Caractérisation de la convergence d'une série à termes positifs)**.**
Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs ; la série* $\sum u_n$ *est convergente si, et seulement si, la suite* (S_n) *est majorée et dans ce cas*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_n S_n = \sup_n S_n$$

Sinon, la série $\sum u_n$ *est divergente et la suite* (S_n) *diverge vers* $+\infty$*.*

Définition 2.1 (Série majorante, série minorante)**.**
On dit que la série $\sum v_n$ *est une* série majorante *de la série* $\sum u_n$ *si, et seulement si,* $\sum v_n$ *est une série à termes positifs qui vérifient*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n;$$

On dit que la série $\sum v_n$ *est une* série minorante *de la série* $\sum u_n$ *si, et seulement si,* $\sum v_n$ *est une série à termes positifs qui vérifient*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n \leqslant u_n.$$

Théorème 2.2 (Convergence et divergence par comparaison)**.**
Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes* positifs*.*

(*i*) *Si* $\sum v_n$ *est une série* majorante convergente *de la série* $\sum u_n$*, alors la série* $\sum u_n$ *converge et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

(*ii*) *si* $\sum v_n$ *est une série minorante divergente de* $\sum u_n$*, alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Remarques.
Pour montrer la convergence d'une série à termes positifs, on recherche une série majorante convergente.

Pour montrer la divergence d'une série à termes positifs, on recherche une série minorante divergente.

Proposition 2.1 (Convergence et divergence par prépondérance)**.**
Soient deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ *telles que* $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ *; alors :*

(*i*) *si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *est une série convergente ;*

(*ii*) *si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *est une série divergente.*

Remarque. la précédente proposition reste valable si l'on remplace l'hypothèse de prépondérance $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ par l'hypothèse de domination $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

2.2 Règle des équivalents

Théorème 2.3 (Règle des équivalents).
Soient $\sum u_n$ *une série à termes positifs et* $\sum v_n$ *une série à termes réels ; alors*

$$\boxed{u_n \underset{n}{\sim} v_n \implies \text{les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}}$$

Remarque. On veillera à ne pas appliquer ce théorème à des séries complexes ou à des séries dont les termes de la suite ne sont pas de signe constant, sauf pour établir l'absolue convergence.

Exemple 2.1. *La série* $\sum \ln\big(1+(-1)^n/n\big)$ *est une série divergente alors que la série* $\sum(-1)^n/n$ *est convergente. La règle des équivalents est mise en défaut pour les séries qui ne sont pas à termes réels et de signe constant.*

2.3 Séries de référence

Définition 2.2 (Série de Riemann).
Les séries de Riemann sont les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *où* α *est un nombre réel.*

Théorème 2.4 (Nature des séries de Riemann).
$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge* $\iff \alpha > 1,$

Exemples d'utilisation

— Si $u_n \underset{n}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ converge $\iff \alpha > 1$

— Si $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge, ceci se traduit par :

$$\boxed{\text{Si } \lim n^\alpha u_n = 0 \text{ pour un } \alpha > 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ converge}}\,.$$

— Si $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et $\alpha \leqslant 1$, alors on ne peut rien conclure sur la nature de $\sum u_n$

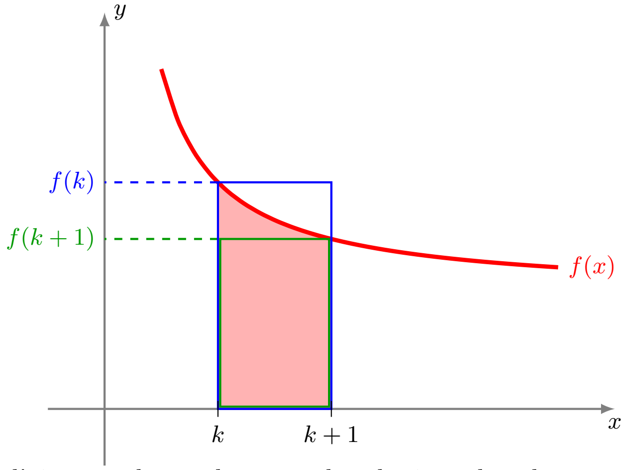
2.4 Cas d'une fonction monotone décroissante

Théorème 2.5 (Comparaison série-intégrale).
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une application continue et décroissante sur* $[0, +\infty[$.
Les sommes partielles S_N *de la série* $\sum f(n)$ *vérifient :*

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N - f(0) \leqslant \int_0^N f(t)\, dt \leqslant S_N - f(N)$$

Remarque. Pour $k \in \mathbf{N}$. Comme f est décroissante, pour $k \leqslant t \leqslant k+1$, on a $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ (attention à l'ordre). En intégrant sur l'intervalle $[k, k+1]$ de longueur 1, on obtient :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k)$$



Sur le dessin cette inégalité signifie que l'aire sous la courbe, entre les abscisses k et $k+1$, est comprise entre l'aire du rectangle vert de hauteur $f(k+1)$ et de base 1 et l'aire du rectangle bleu de hauteur $f(k)$ et de même base 1.

3 Application au développement décimal d'un nombre réel

Définition 3.1 (Nombre décimal)**.**
*On appelle **nombre décimal** tout nombre rationnel de la forme* $\dfrac{a}{10^m}$ *où a est un entier relatif et m un entier naturel.*

Théorème 3.1.
Tout nombre réel positif possède un unique développement décimal propre. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \quad \textit{avec :} \begin{cases} a_0 = \lfloor x \rfloor \\ \forall k \geqslant 1, a_k = \lfloor 10^k x \rfloor - 10\lfloor 10^{k-1} x \rfloor \end{cases}$$

où $a_0 \in \mathbf{Z}$ et pour tout $k \geqslant 1,\ a_k \in [\![0,9]\!]$.
On convient d'écrire :

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$$

Exemple 3.1. $\dfrac{1}{3} = 0,33333\ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$.