Polynômes

Dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ considéré sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $\star$ les notions qui ne seront pas prioritaires dans une première approche de ce chapitre.

1 Structure de $\mathbb{K}[X]$

1.1 Définition

Les polynômes à une indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont des objets mathématiques de la forme

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n,$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée X à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Un terme de la forme a_kX^k est appelé monôme de degré et a_k est appelé coefficient du monôme de degré k.

Remarques:

1. Attention, un polynôme n'est pas une fonction. X est un nouveau symbole appelé indéterminée pas une variable.
2. On peut aussi représenter un polynôme P par $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_kX^k$, où (a_k) est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang. On a alors un isomorphisme d'espaces vectoriels naturels entre $\mathbb{K}[X]$ et les suites d'éléments de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang.

1.2 Opérations sur les polynômes et degré

Définition 1 (Opérations sur les polynômes)**.** *Pour* $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_kX^k$, $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_kX^k$ *polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on définit les polynômes*

- $P + \lambda Q = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + \lambda b_k)X^k$
- $P \cdot Q = \sum_{k=0}^{\infty} c_kX^k, \quad$ où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$.

Remarque: Ces règles opératoires sont munissent $\mathbb{K}[X]$ d'un structure d'espace vectoriel et d'anneau (en particulier, la multiplication des polynômes est distributive par rapport à l'addition).

Définition 2 (Composition des polynômes)**.** *Pour* $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_kX^k$, $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_kX^k$ *polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *on définit la composée de* P *et* Q *par*

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{\infty} a_kQ^k.$$

Définition 3. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_kX^k$ *différent du polynôme nul, on appelle degré de* P *noté* $\deg P$ *le plus grand entier* k *tel que* $a_k \neq 0$. *Si* $n = \deg P$, a_nX^n *est appelé monôme dominant et* a_n *coefficient dominant.*

Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant est 1.

On étend la définition du degré au polynôme nul en posant $\deg 0 = -\infty$.

Proposition 1. *Soient* P, Q *deux polynômes non nuls et* $\lambda \in \mathbb{K}^*$, *alors on a*

- $\deg \lambda P = \deg P$.
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, *une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour que ce soit une égalité est* $\deg P \neq \deg Q$.
- $\deg PQ = (\deg P) + (\deg Q)$.
- *Si* $\deg Q > 0$, $\deg P \circ Q = (\deg P)(\deg Q)$.

Remarque: Pour calculer le degré d'une somme de polynômes, on calcule le plus souvent une majoration du degré par un entier p puis on explicite les coefficients à partir de celui de degré p en décroissant jusqu'à trouver un coefficient non nul.

Exemples:

1. $X^{843} + X^2 + 1$ est un polynôme unitaire de degré 843.
2. $(X^2-1)^n - (X^2+1)^n$ est polynôme de degré $2n-2$ de coefficient dominant $-2n$.

Proposition 2 (Division euclidienne)**.** *Soient A, B deux polynômes avec B non nul, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que*

$$A = BQ + R \qquad \text{avec} \quad \deg R < \deg B.$$

Le polynôme Q (respectivement R) est le quotient (respectivement le reste) de la division euclidienne de A par B. On ait que B divise A si le reste de la division euclidienne est nulle.

Exemple: Pour la division euclidienne de $X^4 + 3X^2 - 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$, on écrit successivement :

$$\begin{array}{rcl} X^4 + 3X^2 - 2X + 1 & = & X^2(X^2 + X + 1) + (-X^3 + 2X^2 - 2X + 1) \\ -X^3 + 2X^2 - 2X + 1 & = & (-X)(X^2 + X + 1) + 3X^2 - X + 1 \\ 3X^2 - X + 1 & = & 3(X^2 + X + 1) - 4X - 2 \end{array}$$

De sorte que $X^4 + 3X^2 - 2X + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 3) + (-4X - 2)$. Dans la pratique, on pourra présenter le calcul comme une division euclidienne d'entiers :

$$\begin{array}{r|l} X^4 + \quad 3X^2 - 2X + 1 & X^2 + X + 1 \\ \cline{2-2} -(X^4 + X^3 + X^2) \quad\quad & X^2 - X + 3 \\ \hdashline -X^3 + 2X^2 - 2X + 1 & \\ -(-X^3 - X^2 - X) \quad\; & \\ \hdashline 3X^2 - X + 1 & \\ -(3X^2 + 3X + 3) & \\ \hdashline -4X - 2 & \end{array}$$

1.3 Racines

Définition 4. *On définit l'application φ :*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ & P = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k & \longmapsto & \tilde{P}(t) = \left(t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right). \end{array}$$

La fonction $\tilde{P}$ est appelée fonction polynomiale associée à P. On simplifiera $\tilde{P}(t)$ en écrivant $P(t)$.

Proposition 3. *L'application φ définie précédemment est un morphisme d'espace vectoriel vérifiant de plus*

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \qquad \varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q).$$

Définition 5. *Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, α une racine de P, si $\varphi(P)(\alpha)$, c'est-à-dire si*

$$\tilde{P}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha^k = 0.$$

Proposition 4. *Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, il y a équivalence entre* *(i)* α *est une racine de* P.

(ii) $X-\alpha$ *divise* P.

Corollaire 1. *Soient* $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ *avec les* (α_i) *2 à 2 distincts et* $P\in\mathbb{K}[X]$*, il y a équivalence entre*

(i) $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \alpha_i$ *est une racine de* P.

(ii) $(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$ *divise* P.

Proposition 5. *On a*

(i) Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ *un polynôme non nul, si* P *a* p *racines distinctes* $(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$*, alors* $\deg P\geq p$ *et si de plus* $p=\deg P$*, alors*

$$P=\lambda(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_p),\quad \text{où } \lambda \text{ est le coefficient dominant de } P.$$

(ii) L'application $P\mapsto\tilde{P}$ *est une injection de* $\mathbb{K}[X]$ *dans* $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$.

(iii) Si un polynôme a une infinité de racines, alors il est nul.

Remarques:

1. La première partie du premier point se traduit par « **Un polynôme** P **non nul a au plus** $\deg P$ **racines.** »
2. Le point (i) sert fréquemment pour démontré l'égalité de 2 polynômes P et Q. Il faut et il suffit de montrer que $P-Q$ a plus de racines que son degré. On explicitera souvent que ce polynôme a une infinité de racines, ce qui permet d'utiliser le point (iii).

Exemple :

On peut montrer l'unicité des polynômes de Tchebychev en utilisant ce corollaire.

Pour tout entier $n\geq 0$, il existe un unique polynôme T_n tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad T_n(\cos(x))=\cos(nx).$$

Existence :

En utilisant la formule de Moivre, on a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{inx})\\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^n\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\sin(x))^k(\cos(x))^{n-k}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}(x)\cos^{n-2k}(x)+i\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(x)\cos^{n-2k-1}(x)\right)\\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(-1)^k\sin^{2k}(x)\cos^{n-2k}(x)\\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(-1)^k(1-\cos^2(x))^k\cos^{n-2k}(x)=T_n(\cos(x))
\end{aligned}$$

où $T_n=\displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(-1)^k(1-X^2)^kX^{n-2k}$.

Unicité :

Supposons qu'il existe Q_n un polynôme tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad Q_n(\cos(x))=\cos(nx).$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, le polynôme T_n-Q_n admet $\cos(x)$ comme racine, car

$$(T_n-Q_n)(\cos(x))=T_n(\cos(x))-Q_n(\cos(x))=\cos(nx)-\cos(nx)=0.$$

Tout élément de $[-1,1]$ est donc racine de T_n-Q_n, il en résulte que ce polynôme admet une infinité de racines, il est donc nul d'où $Q_n=T_n$.

2 Dérivation et racines multiples

2.1 Dérivation

2.1.1 Définition

On définit la dérivation D comme l'unique endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$D(X) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \quad D(PQ) = D(P) \cdot Q + P \cdot D(Q).$$

Remarque: On notera P' pour $D(P)$, mais bien noter que l'opération est algébrique, ce n'est pas une définition analytique (Pas de calcul de la limite d'un taux d'accroissement). D'ailleurs si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on n'a pas défini de dérivation analytique.

2.1.2 Propriétés

Proposition 6. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$*, alors on a* $P' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} X^k$.

Remarque: Ouf ! On retrouve bien la dérivée usuelle dans le cas des fonctions polynomiales à valeurs réelles, on a bien, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\tilde{P'} = \left(\tilde{P}\right)'$.

Proposition 7 (Formule de Leibniz)**.** *Soient P, Q 2 polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

2.1.3 Formule de Taylor polynomiale

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors on a

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

Remarque: Pas de problème de définition, le polynôme $P^{(k)}$ étant nul dés que k est strictement supèrieur au degré de P, la somme est finie.
Cette formule est exacte et ne suppose aucune hypothèse de régularité analytique contrairement aux autres formules de Taylor.

2.2 Racines multiples

2.2.1 Définition

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que α est racine d'ordre au moins n si $(X-\alpha)^n$ divise P et que α est racine d'ordre exactement n si $(X-\alpha)^n$, divise P et que $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

2.2.2 Propriétés

Proposition 8. *Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$, il y a équivalence entre*

(i) α est racine d'ordre n de P.

(ii) On a

$$\forall k \in [0, n-1], \quad P^{(k)}(\alpha) = 0 \qquad \textit{et} \qquad P^{(n)}(\alpha) \neq 0.$$

Remarques:

1. On utilise la formule de Leibniz dans le sens (i) vers (ii) et la formule de Taylor polynomiale dans le sens (ii) vers (i).
2. Si on supprime l'hypothèse $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$ dans (ii), on a seulement α est racine d'ordre au moins n de P pour (i).

Proposition 9. *Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $(\alpha_i)_{i\in[1,p]} \in \mathbb{K}^p$ un n-uplet de scalaires distincts et $(n_i)_{i\in[1,p]} \in \mathbb{N}^p$ tel que*

$$\forall i \in [1,p], \quad \alpha_i \textit{ est racine d'ordre au moins } n_i \textit{ de } P,$$

alors on a

$$(X-\alpha_1)^{n_1}(X-\alpha_2)^{n_2}\cdots(X-\alpha_p)^{n_p} \textit{ divise } P.$$

Corollaire 2. *Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $(\alpha_i)_{i\in[1,p]} \in \mathbb{K}^p$ un n-uplet de scalaires distincts et $(n_i)_{i\in[1,p]} \in \mathbb{N}^p$ tel que*

$$\forall i \in [1,p], \quad \alpha_i \textit{ est racine d'ordre au moins } n_i \textit{ de } P,$$

alors on a

$$\sum_{i=1}^{p} n_i \leq \deg P.$$

Remarque: Ce corollaire se résume en **« Un polynôme P non nul a au plus $\deg P$ racines comptées avec leurs multiplicités. »**

3 Polynôme irréductible, polynôme scindé, somme et produit des racines

3.1 Définitions

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$, on dit que

(a) P de $\mathbb{K}[X]$ est un polynôme irréductible, si pour toute factorisation de P sous la forme P_1P_2 avec P_1 et P_2 élément de $\mathbb{K}[X]$, on a $\deg P_1 = 0$ ou $\deg P_2 = 0$.
Attention, cela dépend du choix du corps $\mathbb{K}$, le polynôme X^2+1 est irréductible comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$ mais pas comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ($X^2+1 = (X+i)(X-i)$).
Un polynôme de degré 1 est irréductible quelque soit le choix du corps.
Remarque: Un polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$ de degré supérieur ou égal à 2 ne possède aucun racine dans $\mathbb{K}$. La réciproque n'est pas vraie en général, le polynôme $(X^2+1)^2$ n'a pas de racine réelle, mais il n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$.
Exemples:
   (a) Un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.
   (b) Un polynôme de degré 2 à coefficients réels est irréductible sur $\mathbb{R}$, si et seulement si son discriminant est strictement négatif.

(b) P est scindé sur $\mathbb{K}$, si il existe $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k),$$

ce qui équivaut à : le nombre de racines dans $\mathbb{K}$ de P comptés avec leur multiplicité est égal au degré de P.

3.2 Sommes et produits des racines d'un polynôme

Proposition 10. *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ scindé de degré n avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^n = \lambda \prod_{k=0}^{n}(X-\alpha_k)$, alors on a*

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n}\alpha_k = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}\cdot$$

Exemples:

1. Calcul de
$$A = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + a\right) \qquad \text{et} \qquad B = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
On utilise le polynôme $P_n = (X+1)^n - \mathrm{e}^{2ina}$.
On calcule les racines sur $\mathbb{C}$ et on obtient $\alpha_k = \mathrm{e}^{i\left(2a+\frac{2\pi}{n}\right)} - 1 = 2i\sin\left(a+\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\left(a+\frac{\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
La relation sur le produit des racines nous donne directement
$$\prod_{k=0}^{n-1} 2i\sin\left(a+\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\left(a+\frac{\pi}{n}\right)} = (-1)^n(1-\mathrm{e}^{2ina}).$$
En simplifiant, on obtient
$$A = \frac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{2ina})}{\prod_{k=0}^{n-1} 2i\mathrm{e}^{i\left(a+\frac{\pi}{n}\right)}} = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}.$$
Par passage à la limite en $a = 0$, on obtient
$$B = \frac{n}{2^{n-1}}.$$
2. Soit $P = X^5 + 3X^2 + X + 1$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_5$ ses 5 racines dans $\mathbb{C}$ (on admet que P est scindé sur $\mathbb{C}$). Calculer de manière réduite
$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2+\alpha_k}.$$
Si on pose $\beta_k = \frac{1}{2+\alpha_k}$, on remarque que $\frac{1}{\beta_k} - 2$ est racine du polynôme P, d'où
$$\left(\frac{1}{\beta_k} - 2\right)^5 + 3\left(\frac{1}{\beta_k} - 2\right)^2 + \frac{1}{\beta_k} - 2 + 1 = 0,$$
soit
$$(1-2\beta_k)^5 + 3\beta_k^3(1-2\beta_k)^2 + 2\beta_k^4 - \beta_k^5 = 0.$$
On en déduit que les (β_k) sont les racines du polynôme
$$Q = (1-2X)^5 + 3X^3(1-2X)^2 + X^4 - X^5 = -21X^5 + 69X^4 - 77X^3 + 40X^2 - 10X + 1.$$
Le développement complet de l'expression n'était pas ici nécessaire, on a seulement besoin des coefficients des monômes de degré 4 et 5. En utilisant la relation sur le somme des racines, on obtient
$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2+\alpha_k} = -\frac{-69}{21} = \frac{23}{7}.$$

4 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Les deux premiers paragraphes de cette partie présente la théorie. Le plus important est de savoir factoriser rapidement les polynômes, le troisième paragraphe

4.1 Dans $\mathbb{C}[X]$

4.1.1 Théorème de D'Alembert-Gauss

Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur au égal à 1 admet une racine sur $\mathbb{C}$.

Éléments de preuve à faire: Résultat admis !

4.1.2 Conséquences

Corollaire 3. *Tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ est scindés sur $\mathbb{C}$ et se factorise de manière unique à l'ordre près des facteurs sous la forme*

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{n_k},$$

où les α_k sont des nombres complexes 2 à 2 distincts et les n_k des entiers naturels.

Corollaire 4. *Un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est irréductible si et seulement si il est de degré 1.*

4.1.3 Polynôme conjugué

Définition 6. *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^K \in \mathbb{C}[X]$, on définit le polynôme conjugué de P noté de $\overline{P}$ par*

$$\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k.$$

Proposition 11. *L'application $P \mapsto \overline{P}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ vérifiant*

$$\forall P, Q \in \mathbb{C}[X], \qquad \overline{(PQ)} = \overline{P}\,\overline{Q}.$$

Éléments de preuve à faire: Expliquer la $\mathbb{R}$-linéarité et prouver la multiplicativité.

Corollaire 5. *Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, il y a équivalence entre*

(i) α est racine d'ordre p de P.

(ii) $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre p de $\overline{P}$.

4.2 Dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 12. *Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ se factorise de manière unique à l'ordre près des facteurs sous la forme*

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{n_k} \prod_{k=1}^{p} (X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^{q_k},$$

où les α_k sont des nombres réels 2 à 2 distincts, les n_k des entiers naturels, les (β_k, γ_k) sont des couples de nombres réels 2 à 2 distincts tel que $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$, les q_k des entiers naturels.

Éléments de preuve à faire: Expliquer la preuve par passage dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 6. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.*

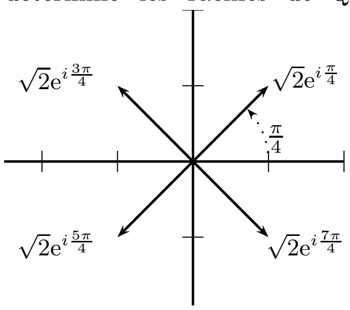
4.3 Méthode et exemples de factorisation

On factorisera le plus souvent d'abord sur $\mathbb{C}$, pour ensuite regrouper les racines conjugués pour obtenir.

Exemples:

1. Factorisons $Q = X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

   On détermine les racines de Q $\alpha^4 = -4 = 4\mathrm{e}^{i\pi}$, soit $\alpha = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$ avec $k \in [\![0,3]\!]$.

   La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est donc

   $$X^4+4 = \left(X - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}\right).$$

   En regroupant les racines conjuguées (le premier et le quatrième facteur, puis le deuxième et le troisième facteur), la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est

   $$X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

2. Factorisons $Q_n = X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, déduisons en la factorisation de $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Les racines de Q_n sont $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On en déduit donc

   $$Q_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right).$$

   Si $n(= 2p+1)$ est un nombre impair, il y a une seule racine réelle et on obtient en regroupant les racines conjugués :

   $$Q_{2p+1} = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2p+1}\right)X + 1\right).$$

   Si $n(= 2p)$ est un nombre pair, il y a deux racines réelles et on obtient en regroupant les racines conjugués :

   $$Q_{2p} = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)X + 1\right).$$

   Pour P_n on remarque que $(X-1)P_n = Q_{n+1}$ et on en déduit que

   $$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n+1}}\right).$$