EXERCICE 1 :

On considère les applications f et g définies par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto xy \qquad\qquad x \longmapsto (x, x^2)$$

1. Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Les applications $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

EXERCICE 2 :

L'application h définie par

$$h : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(p,q) \longmapsto 2^p 3^q$$

est-elle injective ? Est-elle surjective ?

EXERCICE 3 :

Soit $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1},\, n \in \mathbb{N}\right\}$

Montrer que A est borné, déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

EXERCICE 4 :

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$.

EXERCICE 5 :

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble

$$A + B = \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}$$

Montrer que $A + B$ est majorée et que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

EXERCICE 6 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$. Déterminer la limite de $\sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 7 :

Déterminer $\inf A_n$ avec $A_n = \left\{(x_1 + \ldots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}\right) ;\ x_1, \ldots, x_n > 0\right\}$