EXERCICE 1 :

Non encore corrigé.

EXERCICE 2 :

Non encore corrigé.

EXERCICE 3 :

Soit x et y deux réels tels que $\underline{\mathbf{x+y=1}}$ et soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} y & -x \\ -y & x \end{pmatrix}$$

1. $AB = 0_2$ et $BA = 0_2$.
2. Soit, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$: $A^n = A$.

   Initialisation : $n = 1$ et $A^1 = A$ donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie.

$$\begin{aligned} P(n)\,\text{est vraie} &\Leftrightarrow A^n = A \\ &\Leftrightarrow A \times A^n = A \times A \\ &\Leftrightarrow A^{n+1} = A^2 \\ &\Leftrightarrow A^{n+1} = A \end{aligned}$$

   en effet $\begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+xy & x^2+xy \\ xy+y^2 & xy+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x+y) & x(x+y) \\ y(x+y) & y(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} = A$ car $x+y=1$.
   donc $P(n+1)$ est vraie.

   Ainsi pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{A^n = A}$. On démontre de même que $B^n = B$.
3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont des réels tels que $p - q \neq 1$.
   (a) $A+(p-q)B = \begin{pmatrix} x+(p-q)y & x(1-p+q) \\ y(1-p+q) & y+(p-q)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q+(p-q)(1-p)}{1-p+q} & q \\ \frac{1-p+q(p-q)}{-p+q} & 1-q \end{pmatrix} \underset{\substack{numé.\,dével.\\ facto.\,simpl.}}{=} \begin{pmatrix} p & q \\ 1-p & 1-q \end{pmatrix} = M$

   avec $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{q}}{\mathbf{1-p+q}} \Leftrightarrow \mathbf{x(1-p+q) = q}$ **et** $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{1-p}}{\mathbf{1-p+q}} \Leftrightarrow \mathbf{y(1-p+q) = 1-p}$.

   (b) Soit, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$: $M^n = A + (p-q)^n B$.

   Initialisation : $n = 1$ et $A + (p-q)B = M$ (cf. 3.a) donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ vraie implique $P(n+1)$ vraie.

$$\begin{aligned} P(n)\,\text{est vraie} &\Leftrightarrow M^n = A + (p-q)^n B \\ &\Rightarrow M \times M^n = M(A + (p-q)^n B) \\ &\Leftrightarrow M^{n+1} = MA + (p-q)^n MB \\ &\Leftrightarrow M^{n+1} = A + (p-q)^n (p-q) B \\ &\Leftrightarrow M^{n+1} = A + (p-q)^{n+1} B \end{aligned}$$

   en effet $MA = (A + (p-q)B)A = A^2 + (p-q)BA = A + (p-q)0_2 = A$ **(cf. 1. et 2.)** ;
   et $MB = (A + (p-q)B)B = AB + (p-q)B^2 = 0_2 + (p-q)B = (p-q)B$ **(cf. 1. et 2.)**.
   donc $P(n+1)$ est vraie.

   Ainsi pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{M^n = A + (p-q)^n B}$.

(c) $-1 < p-q < 1$, $(p-q)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc le coeffcients de la matrice M^n tendent vers ceux de A. (compte-tenu des propriétés opératoires sur les matrices)

EXERCICE 4 :

Non encore corrigé.

EXERCICE 5 :

Non encore corrigé.

EXERCICE 6 :

Soit ω une racine nième de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)w^k$$

$$\begin{aligned}
(1-\omega)S = (1-\omega)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \omega\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n}k\omega^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}k\omega^k - \sum_{k=1}^{n}k\omega^k + \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k \\
&= -n\omega^n + 0 \quad (\omega^n = 1) \\
&(1+\omega+\ldots+\omega^{n-1} = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0)
\end{aligned}$$

On obtient donc : $S = \dfrac{-n}{1-\omega} \quad \omega \neq 1$

EXERCICE 7 :

Soit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/5}$, on sait que $1+z+z^2+z^3+z^4 = 0$, donc en prenant la partie réelle, on obtient :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$$

On pose, $r = cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et en utilisant $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on obtient l'équation

$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$

On obtient comme solution, puisque $r > 0$, $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$1 - 2\sin^2(x) = \cos(2x)$ donc $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1-r}{2} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et comme $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) > 0$, on obtient l'expression cherchée

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$