AN 7 - Nombres réels - Suites numériques

1 Nombres réels

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ de nombres appelés **nombres réels**, tel que :
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- il existe une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des points d'une droite orientée ;
- les opérations de $\mathbb{R}$ prolongent celles de $\mathbb{Q}$;
- la relation « $\leq$ » est une relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \leq)$ étant totalement ordonné par cette relation d'ordre.

Remarque 1
On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Définition 1 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. On appelle **borne supérieure** de A le plus petit des majorants de A, lorsqu'il existe. On le note alors $\sup A$.
2. On appelle **borne inférieure** de A le plus grand des minorants de A, lorsqu'il existe. On le note alors $\inf A$.

Remarque 2

1. La borne supérieure (resp. inférieure), si elle existe, est unique.
2. la borne supérieure (ou inférieure), si elle existe, n'appartient pas forcément à l'ensemble !

Proposition 1 Propriété de la borne supérieure

1. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
2. Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Proposition 2 Caractérisation d'une borne supérieure

Soient A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup A \iff \left\{ \begin{array}{l} M \text{ majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \leqslant M \end{array} \right. .$$

De même, on a :

$$m = \inf A \iff \left\{ \begin{array}{l} m \text{ minorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ m \leqslant x < m + \varepsilon. \end{array} \right.$$

Théorème-Définition 1 Partie entière d'un réel

Pour tout réel x, il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leqslant x < p + 1.$$

L'entier p est appelé **partie entière** de x et on note $p = \mathrm{E}(x)$ ou $p = \lfloor x \rfloor$.

Exemple 1
$\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ et $\lfloor 3 \rfloor = 3$.

Proposition 3

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

Théorème-Définition 2 Approximation décimale à 10^{-n} près

Soient x un réel et n un entier. On a :

$$\lfloor x \times 10^n \rfloor \leqslant x \times 10^n < \lfloor x \times 10^n \rfloor + 1.$$

- $\lfloor x \times 10^n \rfloor \, 10^{-n}$ est un **nombre décimal approchant par défaut** x à 10^{-n} près.
- $\lfloor x \times 10^n \rfloor \, 10^{-n} + 10^{-n}$ est un **nombre décimal approchant par excès** x à 10^{-n} près.

Remarque 3

– On a $\lfloor x \times 10^n \rfloor \, 10^{-n} \leqslant x < \lfloor x \times 10^n \rfloor \, 10^{-n} + 10^{-n}$.
– Ce résultat dit que l'on peut approcher un réel quelconque d'aussi près que l'on veut par des nombres décimaux.

Exemple 2

L'écriture décimale illimitée de x récapitule toutes ces approximations :
$\sqrt{2} = 1,41421356237...$ signifie :

$$\begin{array}{rcl} 2 \leqslant & \sqrt{2} & < 3 \\ 2,1 \leqslant & \sqrt{2} & < 2,2 \\ 2,41 \leqslant & \sqrt{2} & < 2,42 \\ 2,414 \leqslant & \sqrt{2} & < 2,415 \\ & \cdots & \end{array}$$

2 Généralités sur les suites réelles

Définition 2 Suite réelle

On appelle **suite réelle** toute application :

$$\left| \begin{array}{lcl} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u : n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array} \right. .$$

La suite numérique est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$, u_n étant le terme général de la suite.

Remarque 4

On peut aussi définir des suites sur $I = \{n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}\}$ mais comme il existe une bijection entre I et $\mathbb{N}$, l'étude des suites définies sur $\mathbb{N}$ suffit.

Définition 3 Monotonie, suite majorée, suite minorée

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est :

1. **croissante** (resp. **décroissante**) si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n \ \text{(resp. } u_{n+1} \geq u_n\text{)}\,;$$

2. **monotone** si elle est croissante ou décroissante ;
3. **constante** si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0;$$

4. **stationnaire** si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0}\,;$$

5. **majorée** (resp. **minorée**) si :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M\ \ (\text{resp. } u_n \geq M)\,;$$

6. **bornée** si elle est majorée et minorée, autrement dit :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Remarque 5

1. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) lorsque l'inégalité large $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$) est remplacée par l'inégalité stricte $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).

2. Certaines suites ne sont ni croissantes, ni décroissantes (qui n'est pas le contraire de croissante), ni positive, ni négative (qui n'est pas le contraire de positive).
Il suffit de prendre par exemple la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$, elle n'est ni croissante, ni décroissante, ni positive, ni négative.

Définition 4 Somme, produit, quotient

Soient deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les opérations suivantes :

1. **somme** de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ la suite de terme général $u_n + v_n$;

2. **produit** de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ la suite de terme général $u_n \times v_n$;

3. **produit** de $(u_n)_n$ par le réel λ la suite de terme général λu_n ;

4. **quotient** de $(u_n)_n$ par la suite $(v_n)_n$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$.

Définition 5 Suite extraite

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On dit que $(v_n)_n$ est **une suite extraite** de $(u_n)_n$, s'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Remarque 6
On peut montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, $\varphi(n) \geq n$.

Exemple 3
les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{10n+1})_n$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_n$.

3 Suites particulières

Définition 6 Suites arithmétiques - Suites géométriques

1. Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n + r$, la constante r est appelée **raison** de la suite arithmétique.

2. Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{K}$ tel que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = q \times u_n$, la constante q est appelée **raison** de la suite géométrique.

Exemple 4

1. La suite définie par $u_n = 2n + 3$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

2. La suite définie par $u_n = 2^n$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Proposition 4 Terme général - Somme

1. Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors :
– le terme général de rang n est $u_n = u_0 + nr$;
– la somme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right).$$

2. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors :
– le terme général de rang n est $u_n = u_0 \times q^n$;
– la somme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \begin{cases} (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \\ u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1. \end{cases}$$

Définition 7 Suite arithmético-géométrique

Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

Méthode : savoir déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique
Pour calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique $(u_n)_n$ vérifiant la relation $u_{n+1} = au_n + b$:
- si $a = 1$, on reconnaît une suite arithmétique et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + n \times a.$$

- si $a \neq 1$, on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$ (on a $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$) et on montre que la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a, d'où pour tout entier naturel n, on a $v_n = a^n v_0$ et par suite :

$$u_n = a^n (u_0 - \alpha) + \alpha.$$

Définition 8 Suite récurrente linéaire d'ordre 2

1. Une suite $(u_n)_n$ de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n.$$

2. L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée **équation caractéristique** de la suite $(u_n)_n$.

Théorème 1 Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n, \ \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Si l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ admet :

1. deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, \ \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2;$$

2. une racine réelle double r_0, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (C_1 \times n + C_2)\, r_0^n, \ \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2;$$

3. deux racines complexes conjuguées $r_1 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2 = \overline{r_1}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta))\, r^n, \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Théorème 2 Monotonie des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit une suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : A \to A$, $u_0 \in A$ et $A \subset \mathbb{R}$.
Si f est croissante sur A alors $(u_n)_n$ est monotone, plus précisément :

1. si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante ;

2. si $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Remarque 7
Attention : si f est décroissante sur A, la suite (u_n) n'est pas monotone.

4 Limites d'une suite réelle

Définition 9 Limite finie, limite infinie

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite $(u_n)_n$:

1. admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,;$$

2. admet pour limite $+\infty$ lorsque :

$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \geqslant A)\,;$$

3. admet pour limite $-\infty$ lorsque :

$$\forall A < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant A)\,.$$

Remarque 8

1. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$ s'il n' y a pas d'ambigüité ou parfois $u_n \xrightarrow{\ell}$.
Ces notations sont aussi valables pour une limite infinie.

2. $\lim u_n = -\infty \iff \lim(-u_n) = +\infty$.

3. On abrège souvent la phrase logique du (**1.**) en :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

Noter que n_0 dépend évidemment de ε et que l'on ne peut pas échanger l'ordre du « pour tout » et du « il existe ».

4. L'inégalité $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ signifie $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$.

5. On aurait pu aussi définir la limite en remplaçant l'inégalité large $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ par une inégalité stricte $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Proposition 5

1. $\lim u_n = \ell \iff \lim(u_n - \ell) = 0 \iff \lim |u_n - \ell| = 0$,

2. $\lim u_n = \ell \implies \lim |u_n| = |\ell|$.

Remarque 9
Si $(u_n)_n$ a pour limite $-\infty$ ou $+\infty$ alors $\lim |u_n| = +\infty$.
Attention : la réciproque est fausse !

Définition 10 Suite convergente, suite divergente

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **convergente** si elle admet une limite **finie**.
Dans le cas contraire, on dit qu'elle est **divergente**

Remarque 10
Attention : une suite est divergente ne signifie pas qu'elle n'admet pas de limite.
Une suite est divergente signifie qu'elle tend vers $\pm\infty$ ou bien qu'elle n'admet pas de limite.

Exemple 5

1. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
2. Les suites $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes.

Proposition 6 Unicité de la limite

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Proposition 7
Toute suite convergente est bornée.

Proposition 8
Si la suite $(u_n)_n$ est bornée et $\lim v_n = 0$ alors $\lim (u_n \times v_n) = 0$.

Exemple 6
Si $(u_n)_n$ est la suite donnée par $u_n = \cos(n)$ et $(v_n)_n$ est celle donnée par $v_n = \dfrac{1}{n+1}$, alors $\lim (u_n v_n) = 0$.

Proposition 9

1. Si $\lim u_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite a également pour limite ℓ.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell \iff \lim u_n = \ell$.

Remarque 11
La contraposée de la première assertion de cette propriété sera parfois utilisée pour démontrer qu'une suite $(u_n)_n$ diverge. Ainsi, il suffit, par exemple, de déterminer 2 suites extraites de $(u_n)_n$ qui ont des limites différentes.

Remarque 12
La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente.

On va faire une brève extension aux suites complexes.

Définition 11 Convergence d'une suite complexe

Soit $(u_n)_n$ une suite complexe, et soit ℓ un nombre complexe. On dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ lorsque $|u_n - \ell| \longrightarrow 0$, autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)\,;$$

Proposition 10 CNS de convergence d'une suite complexe

Soient $(u_n)_n$ une suite complexe et ℓ un nombre complexe.

$$\lim u_n = \ell \iff \lim(\mathrm{Re}(u_n)) = \mathrm{Re}(\ell) \text{ et } \lim(\mathrm{Im}\,(u_n)) = \mathrm{Im}\,(\ell).$$

5 Opérations sur les limites

On suppose dans ce paragraphe que les suites sont réelles.

Somme :

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim\,(u_n + v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	on ne peut pas conclure

Produit et Quotient :

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim\,(u_n \times v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell \times \ell'$
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$\mathrm{sgn}(\ell)\infty$
$\ell \neq 0$	$-\infty$	$\mathrm{sgn}(-\ell)\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	on ne peut pas conclure

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
$\ell \neq 0$	0^+	$\mathrm{sgn}(\ell)\infty$
$\ell \neq 0$	0^-	$\mathrm{sgn}(-\ell)\infty$
0	0	On ne peut pas conclure
$\pm\infty$	$\pm\infty$	On ne peut pas conclure
$+\infty$	ℓ	$\mathrm{sgn}(\ell)\infty$
$-\infty$	ℓ	$\mathrm{sgn}(-\ell)\infty$

Pour le quotient, on suppose que les termes de suite $(v_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

6 Limites et relation d'ordre

Dans ce paragraphe, on étudiera le passage à la limite dans une inégalité.

Proposition 11 Inégalité et limite

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes respectivement vers ℓ et ℓ'.

1. Si $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$), il existe $m > 0$ (resp. $m < 0$) et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > n_0,\ u_n \geq m \text{ (resp. } u_n \leq m).$$

2. S'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0,\ u_n \geq 0$, alors $\ell \geq 0$.

3. S'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0,\ u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Remarque 13

1. Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$) et $(u_n)_n$ est convergente, alors $\lim u_n \leq M$ (resp. $\lim u_n \geq M$).

2. On ne peut pas améliorer le résultat précédent en utilisant une inégalité stricte (le passage à la limite élargit l'inégalité).
Prendre par exemple : $u_n = 1/n$.

Proposition 12 Inégalité et infinie

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ u_n \leq v_n.$$

1. $\lim u_n = +\infty \implies \lim v_n = +\infty$.

2. $\lim v_n = -\infty \implies \lim u_n = -\infty$.

Théorème 3 Théorème d'encadrement ou théorème des « gendarmes »

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors :

$$\lim u_n = \lim w_n = \ell \implies \lim v_n = \ell.$$

Une des conséquences de la propriété de la borne supérieure est le théorème suivant.

Théorème 4 Suites monotones

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante .

1. Si $(u_n)_n$ est majorée, elle converge vers $\ell = \sup\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$.

2. Si $(u_n)_n$ n'est pas majorée, alors $\lim u_n = +\infty$.

Remarque 14
Si une suite croissante est majorée par le réel M, alors la limite de cette suite est inférieure ou égale à M.

Proposition 13 Suites décroissantes

Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante :

1. si la suite est minorée, elle converge vers $\ell = \inf\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$;

2. si $(u_n)_n$ n'est pas minorée, alors $\lim u_n = -\infty$.

Définition 12 Suites adjacentes

On dit que deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **adjacentes** si :

1. $(u_n)_n$ est croissante ;

2. $(v_n)_n$ est décroissante ;

3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Définition 13 Convergence des suites adjacentes

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites adjacentes. Alors, elles convergent vers le même réel ℓ. De plus, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n.$$