# AN 2 - Inégalités dans $\mathbb{R}$

## 1 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

**Définition 1**
On dit que $\leq$ est une **relation d'ordre** sur $\mathbb{R}$ car elle possède les propriétés suivantes :

**1.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a \leq a$. — Réflexivité

**2.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$. — Transitivité

**3.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$. — Antisymétrie

**Remarque 1**

- La relation d'ordre $\leq$ est dite totale dans car on peut toujours comparer deux réels.
  i.e.
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \text{ ou } \ y \leq x$$
- On définit la relation d'ordre contraire :
$$x \geq y \iff y \leq x$$
- Une inégalité stricte entre deux réels $x$ et $y$ est définie de la manière suivante :
$$x < y \iff (x \leq y \ \text{ et } \ x \neq y)$$
- $x < y \implies x \leq y$ mais la réciproque est fausse.
- D'un point de vue « logique » , la négation de $x \leq y$ est $x > y$.

**Définition 2**
On pose :

**1.** $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ et $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$

**2.** $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$ et $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$

**Proposition 1**

**1.** $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \leq y \implies x + z \leq y + z$

**2.** $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \leq y$ et $0 \leq z) \implies xz \leq yz$

On en déduit alors que l'on a :

**1.** $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(x \leq y$ et $z \leq t) \implies x + z \leq y + t$

**2.** $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t) \implies xz \leq yt$

**Proposition 2**
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**1.** $x \leq y \iff -x \geq -y$.

**2.** Si $x$ et $y$ sont non nuls et de même signe, alors $(x \leq y) \iff \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$.

**Remarque 2**
– Les propriétés qui précèdent restent vraies si on remplace $\leq$ par $<$.
– On a même $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(x < y \text{ et } z \leq t) \implies x + z < y + t$.
– Pas de soustraction membre à membre entre inégalités, ni de division.
– Pour comparer deux expressions, il est commode de déterminer le signe de la différence qui peut lui-même être déterminé par factorisation avec éventuellement l'utilisation d'un tableau de signes.

## 2 Valeur absolue

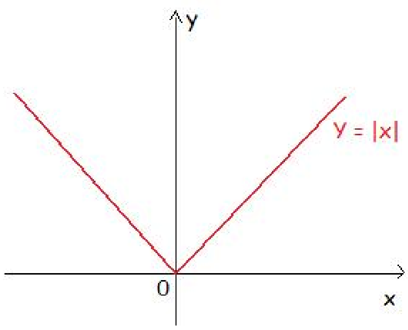
**Définition 3**
Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de $x$ le réel noté $|x|$ et défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Proposition 3**
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$.

**1.** $|x| \geq 0$
**2.** $|x| = 0 \iff x = 0$
**3.** $|x| = \max\{x, -x\} = |-x|$
**4.** $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$
**5.** $|xy| = |x|\,|y|$
**6.** $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$
**7.** $|x^n| = |x|^n$
**8.** Pour $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
**9.** $|x| = \sqrt{x^2}$
**10.** $|x| = |y| \iff x^2 = y^2 \iff x = y$ ou $\ x = -y$
**11.** $|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$

**Remarque 3**
La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ a pour représentation graphique la courbe suivante :




**Proposition 4**
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \text{et} \qquad |x - y| \geq ||x| - |y||$$

avec égalité si $x$ et $y$ sont de même signe.

**Remarque 4**
La quantité $|x-y|$ mesure la distance entre deux points $x$ et $y$ de la droite réelle.
Soit $(a,x) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
|x-a| = \varepsilon &\iff x = a-\varepsilon \text{ ou } x = a+\varepsilon \\
|x-a| \leq \varepsilon &\iff a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon \\
|x-a| < \varepsilon &\iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \\
|x-a| \geq \varepsilon &\iff x \leq a-\varepsilon \text{ ou } x \geq a+\varepsilon \\
|x-a| > \varepsilon &\iff x < a-\varepsilon \text{ ou } x > a+\varepsilon
\end{aligned}$$

**Remarque 5**
Pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$, on a :

$$\left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

## 3 Intervalles

**Définition 4**
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme :

1. $[a\,;\,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$
2. $]a\,;\,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$
3. $[a\,;\,b[ = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$
4. $]a\,;\,b[ = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
5. $[a\,;\,+\infty[ = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$
6. $]a\,;\,+\infty[ = \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$
7. $]-\infty\,;\,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$
8. $]-\infty\,;\,b[ = \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$
9. $]-\infty\,;\,+\infty[ = \mathbb{R}$

**Remarque 6**

1. $[a\,;\,b]$ est aussi appelé segment et est dit fermé.
   $]a\,;\,b[$ est dit ouvert alors que $]a\,;\,b]$ et $[a\,;\,b[$ sont dits semi-ouverts.
   Enfin $[a\,;\,a] = \{a\}$ et $]a\,;\,a] = \varnothing$.

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\delta \geq 0$.
   $\{x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leq \delta\} = [a-\delta\,;\,a+\delta]$
   $\{x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \delta\} = ]a-\delta\,;\,a+\delta[$
   $\{x \in \mathbb{R},\ |x-a| \geq \delta\} = ]-\infty\,;\,a-\delta] \cup [a+\delta\,;\,+\infty[$
   $\{x \in \mathbb{R},\ |x-a| > \delta\} = ]-\infty\,;\,a-\delta[ \cup ]a+\delta\,;\,+\infty[$

## 4 Majorations et minorations

**Définition 5**
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.

**1.** On dit que $A$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ x \leq M$.
Dans ce cas, on dit que $M$ est un **majorant** de $A$.

**2.** On dit que $A$ est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ m \leq x$.
Dans ce cas, on dit que $m$ est un **minorant** de $A$.

**3.** On dit que $A$ est **bornée** si $A$ est à la fois majorée et minorée.

**Proposition 5**
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
$A$ est bornée si, et seulement si, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leq K$.

**Exemple 1**
– $[0\,;\,1[$ est borné, $]-\infty\,;\,-2]$ est majoré et $\mathbb{N}$ est minoré.
– $\left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est borné puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$.

**Définition 6**
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.

**1.** On dit que $M$ est le maximum de $A$ ou le plus grand élément de $A$ si $M \in A$ et $M$ est un majorant de $A$. On note alors $M = \mathbf{max}\ A$.

**2.** On dit que $m$ est le minimum de $A$ ou le plus petit élément de $A$ si $m \in A$ et $m$ est un minorant de $A$. On note alors $m = \mathbf{min}\ A$.

**Exemple 2**
$-1$ et $1$ sont respectivement le minimum et le maximum de $[-1\,;\,1]$.

**Proposition 6**
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
Le maximum (resp. minimum) de $A$, s'il existe, est unique.

**Remarque 7**
Une partie de $\mathbb{R}$, même bornée, n'admet pas forcément de maximum ou de minimum.