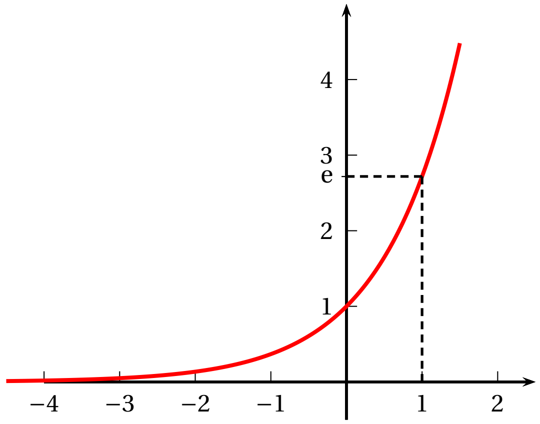
Fonction exponentielle

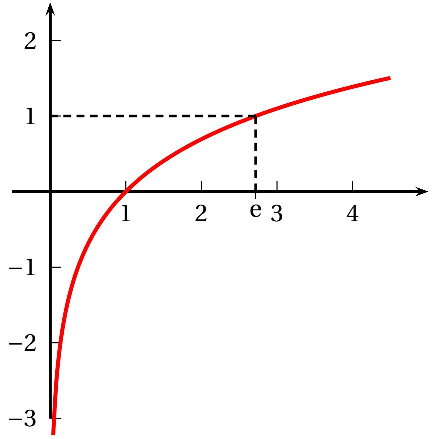


Propriétés

- exp est définie, continue, et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$.
- Pour tous réels x et y on a $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- Pour tout réel x et tout entier relatif k on a $(e^x)^k = e^{kx}$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- exp est l'unique solution de l'équation différentielle $f' = f$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.
- Approximation affine au voisinage de 0 : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
- Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
- Plus généralement, pour tout entier naturel n on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

  Autrement dit au voisinage de $\pm\infty$ l'exponentielle « l'emporte » sur toute puissance de x.

Fonction logarithme népérien



Propriétés

- ln est définie, continue, et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- ln est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.
  Pour tout réel x on a donc $\ln(e^x) = x$ et pour tout réel y strictement positif $e^{\ln(y)} = y$.
- Pour tous réels x et y strictement positifs on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ et $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- Pour tout réel x strictement positif et tout entier relatif k on a $\ln(x^k) = k\ln(x)$.
- ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Approximation affine au voisinage de 0 : $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.
- Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.
- Plus généralement : pour tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln(x) = 0$.

  Autrement dit au voisinage de $+\infty$ et de 0 les puissances de x « l'emportent » sur $\ln(x)$.