Bijection réciproque

Exercice 1 *Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Exprimer $f^{-1}(y)$ pour $y\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.*

Exercice 2 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4+3x^2+1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. Exprimer $f^{-1}(y)$ pour $y\geq 0$. La fonction f^{-1} est-elle dérivable sur $[0,+\infty[$? Calculer $f^{-1}(5)$ et $\left(f^{-1}\right)'(5)$.*

Exercice 3 *Soit $f:[-3,+\infty[$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3+6x+10}}$. Montrer que f est une bijection sur $]0,1]$. Déterminer $f^{-1}(y)$ si $y\in\,]0,1]$. Quelle est la monotonie de f^{-1} ?*

Exercice 4 *Justifier que $f:x\longmapsto x^3+x+1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour $x=-1$ et $x=1$.*

Fonctions exponentielle, puissances et logarithmes

Exercice 5 *Résoudre* $(E_1): x-1=\sqrt{x+2}\quad (E_2): x-1\leq\sqrt{x+2}$

Exercice 6 *Simplifier $a^{\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}}$ pour $a>1$.*

Exercice 7 *Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{x}$*

Exercice 8 *Résoudre $2^{x^3}=3^{x^2}$.*

Exercice 9 *Résoudre $2^x+3^x=5^x$.*

Exercice 10 *Résoudre* $(S_1):\begin{cases}\ln x+\ln y &= \ln 2\\ x+y &= 4\end{cases}$ *puis* (S_2): $\begin{cases}\ln xy &= 5\\ (\ln(x)\ln(y))^2 &= 36\end{cases}$

Exercice 11 *Résoudre* $e^x+e^{1-x}-e-1=0$

Exercice 12 *Donner le domaine de définition des fonctions suivantes et en donner une expression plus simple.*
① $e^{\frac12\ln\left(x^2\right)}$, ② $e^{\frac12\ln\left(1+x^2\right)}$, ③ $x-\ln(xe^x)$, ④ $x^{\frac{1}{\ln(x)}}$, ⑤ $xe^{1-\ln(x)}$, ⑥ $\ln\left(\dfrac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right)$

Exercice 13 *Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n=1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac1n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac1k$ diverge vers $+\infty$.*

★**Exercice 14** *Résoudre le système*

$$\begin{cases}\ln(2xy) &= \ln(x)\ln(y)\\ \ln(yz) &= \ln(y)\ln(z)\\ \ln(2zx) &= \ln(z)\ln(x)\end{cases}$$

★**Exercice 15** *Montrer que pour $x\in\,]0,1[$, on a $x^x(1-x)^{1-x}\geq 2$. (Indication : étudier une bonne fonction).*

Croissances comparées

Exercice 16 *Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f lorsque $f(x)=$*

$$① \ e^{2x}-3e^x-x \quad ② \ e^{x^2}-e^x-e \quad ③ \, x\left(e^{\frac1x}-1\right) \quad ④ \ xe^{\frac1x}-1 \quad ⑤ \, \frac{e^x}{x}$$

Exercice 17 *Calculer les limites suivantes :*

$$① \lim_{x\to+\infty}3x-2-\ln x \quad ② \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+\sqrt{x}} \quad ③ \lim_{x\to+0^+}\frac1x-\ln(x) \quad ④ \lim_{x\to+0^+}\tan x\ln(\sin x) \quad ⑤ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}$$

Exercice 18 *Soit f définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ *par* $f(x)=\tan(x)\exp\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$. *Calculer les limites de f en* $-\frac{\pi}{2}^+, 0^-, 0^+$ *et* $\frac{\pi}{2}^-$.

★**Exercice 19** *Etudier les variations et les limites au bord de la fonction f définie par* $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$.

Trigonométrie hyperbolique

Exercice 20 *Soit* $f(x)=\dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$. *Déterminer l'ensemble de définition de f. Montrer que* $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}3x}{\operatorname{sh}2x}$, *puis exprimer f uniquement à l'aide de la fonction* sh. *Etudier les variations de f.*

Exercice 21 *Calculer* $2\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$ *lorsque* $x=\dfrac{1}{2}\ln 3$.

Exercice 22 *Exprimer* $\operatorname{ch}3x$ *comme un polynôme en* $\operatorname{ch}x$ *et* $\operatorname{sh}2x$ *à l'aide de* $\operatorname{ch}x$ *et* $\operatorname{sh}x$.

Exercice 23 *Simplifier les expressions suivantes :* ① $\operatorname{sh}^2x\cos^2y+\operatorname{ch}^2x\sin^2y$ *et* ② $\operatorname{ch}^2x\cos^2y+\operatorname{sh}^2x\sin^2y$

Exercice 24 *Justifier que la fonction* sh *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et la fonction* ch *une bijection de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}$. *On note* argsh *et* argch *leur fonction réciproque. Montrer que*

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{arg\,sh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ \forall x\geq 1,\ \operatorname{arg\,ch}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Préciser les dérivées de argsh *sur* $\mathbb{R}$ *et de* argch *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

★**Exercice 25** *Pour a et b réels et $n\in\mathbb{N}$, calculer* $C=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(a+kb)$ *et* $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sh}(a+kb)$ *(utiliser $C+S$ et $C-S$).*

★**Exercice 26** *Discuter l'équation* $e^x(k+x)=e^{-x}(k-x)$ *d'inconnue x et de paramètre k. (Indication : étude de fonctions).*

Exercice 27 *Pour $x\in\mathbb{R}$, on définit* $\operatorname{th}x=\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$.

1. *Préciser la parité de* th, *justifier que* th *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* th'.
2. *Montrer que* $\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{th}x=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. *Utiliser une de ces expressions pour en déduire les limites en $+\infty$ et $-\infty$.*
3. *Justifier que* th *est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera. On note* argth *la bijection réciproque.*
4. *Montrer que* $\operatorname{arg\,th}x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ *pour $x\in I$. Justifier que* argth *est dérivable sur I et préciser sa dérivée.*

Trigonométrie circulaire réciproque

Exercice 28 *Soit* $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$, *montrer que f induit une bijection g de* $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ *sur* $[1,+\infty[$, *on note g^{-1} sa réciproque. Donner le domaine de dérivabilité de g^{-1}, calculer* $\left(g^{-1}\right)'$, *montrer que* $\forall y\in D_{g^{-1}},\ g^{-1}(y)=\pi-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 29 *Résoudre :*

① $\arcsin(x)=\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)+\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$ ② $\arcsin(x)=2\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$

③ $\arcsin(x)=2\arctan(x)$ ④ $\arccos x+\arcsin\left(x^2-x+1\right)=\frac{\pi}{2}$

Indication : Analyse-synthèse.

Exercice 30 *Montrer que* $\arctan\left(2\sqrt{2}\right)+2\arctan\left(\sqrt{2}\right)=\pi$

Exercice 31 *Simplifier les expressions suivantes. On précisera le domaine de validité du résultat. On pourra, soit effectuer un calcul direct, soit dériver la fonction (après avoir justifié sur quel intervalle la dérivée existe).*

$$
\begin{array}{llll}
① & 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan x & ② & \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) \\
③ & \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-\arctan(x) & ④ & \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)+\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)
\end{array}
$$

Avec ② retrouver une formule due à Machin : $\arctan\left(\frac{5}{12}\right)=2\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$.

Exercice 32 *Prouver les égalités :*

$$
\begin{array}{ll}
① & \arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}=\arctan(\operatorname{sh}x) \text{ pour } x\geq 0 \text{ et } \arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}=-\arctan(\operatorname{sh}x) \text{ pour } x\leq 0 \\
② & \arctan(\operatorname{sh}x)=2\arctan(e^x)-\dfrac{\pi}{2}.
\end{array}
$$

Exercice 33 *Résoudre*

$$(E) : \arctan(x-1)+\arctan(x)+\arctan(x+1)=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 34 *Résoudre* $\arctan(x)+\arctan\left(x^3\right)=\dfrac{3\pi}{4}$

Exercice 35 *On se propose de trouver les réels x tels que*

$$2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+\arcsin(2x-1)=\frac{\pi}{2}$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f définie par* $f(x)=2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)+\arcsin(2x-1)$
2. *Soit $x\in D_f$, on pose $\theta=\arcsin\left(\sqrt{x}\right)$.*
   Justifier que θ est bien défini et préciser à quel intervalle il appartient, exprimer x en fonction d'une des lignes trigonométriques de θ.
3. *Exprimer* $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ *et $2x-1$ en fonction de θ et conclure.*

Exercice 36 *Montrer que* $\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan(x+1)-\arctan x=\arctan\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right)$. *En déduire la nature de la suite* $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

Exercice 37 *Résoudre* $\arcsin 2x-\arcsin\left(x\sqrt{3}\right)=\arcsin x$.

Fonctions complexes

Example 38 *Montrer que pour $z=a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ complexe non réel (donc $b\neq 0$), la dérivée de* $f(x)=\dfrac{1}{x-z}$ *est définie sur $\mathbb{R}$ et vaut bien* $-\dfrac{1}{(x-z)^2}$.

Example 39 *Calculer rapidement les dérivées successives de* $f(x)=e^x\cos\left(\sqrt{3}x\right)$.

Example 40 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\cos(x)e^x+3\sin(x)e^x$. Trouver $z=a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{Re}\left(ze^{(1+i)x}\right)$. En déduire la dérivée énième de f.*