Inégalités dans $\mathbb{R}$ - Valeur absolue

Exercice 1 *Soient* x, y, z *trois réels tels que* $0 < a \leq x \leq b,\ d \leq y \leq c < 0$ *et* $0 < e \leq z \leq f$.
Donner un encadrement de ① $3x - 4y$,② $x \times y$, ③ $\dfrac{x-y}{2z}$.

Exercice 2 *Montrer que* $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy + y^2 \geq 0$ *(indication :* $x^2 + xy$ *est le début d'un carré ....)*

Exercice 3 *Montrer que* $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ *(indication :* $a^2 - ab - ac$ *est le début d'un carré ...).*
Retrouver le résultat en développant $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$ *où* $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 4 *Montrer que* $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$.

Exercice 5 *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *déterminer le maximum de* $f(x) = x(2n - x)$. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N},\ (2n)! \leq 2n^{2n}$.

Exercice 6 *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *montrer que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leq 1$.

Exercice 7 *Montrer que pour* $x \in]0, 1[$, *on a* $x(1 - x) \leq \dfrac{1}{4}$. *Endéduire que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k (1 - x)^k \leq \frac{4}{3}$.

Exercice 8 *Soient* x *et* y *des réels, montrer que :*

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$

Exercice 9 *Montrer que* $(n!)^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n - k + 1)$. *En déduire que si* $n \geq 1$, *on a* $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{n+1}{2}$

Exercice 10 *Soit* n *un entier supérieur ou égal à* 3.

1. *Montrer que* $\forall k \in \{2, ..., n\}, \quad \dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$
2. *En déduire que* $\forall k \in \{2, ..., n\}, \quad \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
3. *Etablir alors que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq 3$.

Exercice 11 *Montrer que pour* $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. *En déduire que* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$ *est majoré par* 1.

Exercice 12 *Inégalité de Cauchy-Schwarz (CS)*
On désire prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R},\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.
On définit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *par* $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ T(\lambda) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2$.

1. *Montrer que* T *est, en général, un polynôme du second degré.*
2. *Après avoir justifié que* T *garde un signe constant, en déduire l'inégalité de CS. Discuter le cas d'égalité.*
3. *Applications:*

(a) *Pour toute famille* $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ *de* n *nombres réels strictement positifs, montrer que*

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$$

(b) *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$

puis que si $\forall a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}_+$ *sont positifs alors* $\displaystyle\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}\geq\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)$ *et en déduire que* $\forall x>1$, $\sqrt{x^{2n}-1}\geq\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\,\dfrac{x^n-1}{\sqrt{n}}$ *(faire* $a_i=x^{2i}$ *).*

Généralités sur les fonctions

Exercice 13 *Soit* $f(x)=\dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$*, étudier la parité de* f *(rappel* $\dfrac{1}{e^{\alpha x}}=\cdots$*).*

Exercice 14 *Soit* $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$*, calculer* $f(x)+f(-x)$*, que peut on en déduire ?*

Exercice 15 *Soit* f *définie par* $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$*. Déterminer le domaine de définition de* f*, étudier sa parité.*

Exercice 16 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x(1-x)$*, montrer que le graphe de* f *est symétrique par rapport à la droite* $\mathcal{D}:x=\frac{1}{2}$*.*

Exercice 17 *Soit* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)x(1-x)$*, montrer que le graphe de* f *est symétrique par rapport au point* $\Omega:\left(\dfrac{1}{2},0\right)$*.*

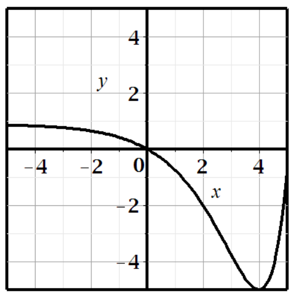
Exercice 18 *Déterminer une période positive (celle qui vous semble la plus petite) de* f *lorsque :*

1. $f(x)=\sin(x)\cos(x)-\sin(x)\cos^3(x)$.
2. $f(x)=\sin(6x)+\tan(3x)$.
3. $f(x)=\sin(x)+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$*. Justifier que* $|f(x)|\leq 2$*. Peut-on affirmer que* $M=2$ *est un maximum de* f *?*

Exercice 19 *Tracer le graphe la fonction* $x\longmapsto\sqrt{x}$ *sur* $[0,+\infty[$*, puis donner rapidement le graphe de*

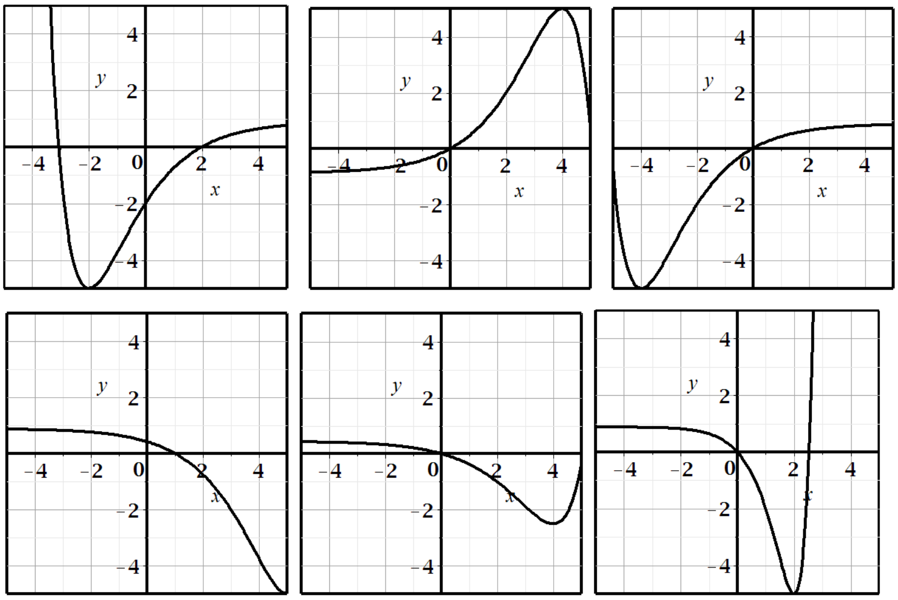
$$x\longmapsto\sqrt{-x},\ x\longmapsto\sqrt{x}+1,\ x\longmapsto\sqrt{x+1},\ x\longmapsto\sqrt{1-x},\ x\longmapsto 2\sqrt{x}\ \text{et}\ x\longmapsto\sqrt{3x}$$

Exercice 20 *Soit* f *définie sur* $\mathbb{R}$*, on donne son graphe sur* $[-4,4]$ *:*



Préciser parmi les six graphes suivants, celui de :

$$① \ x \longmapsto f(-x), \ ② \ x \longmapsto f\left(\frac{x}{2}\right), \ ③ \ x \longmapsto -f(x), \ ④ \ x \longmapsto f(x-1), \ ⑤ \ x \longmapsto f(2-x), \ ⑥ \ x \longmapsto f(2x)$$



Exercice 21 *"Soit f impaire, 2π périodique telle que $f(x) = x$ si $x \in [0, \pi]$", cette affirmation permet-elle de définir f sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 22 *Soit f paire, 4 périodique telle que $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ si $x \in [0, 2]$. Justifier que f est bien définie. Tracer son graphe, calculer $f(3)$, $f(2\pi)$, $f(2013)$, $f(n!)$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

★**Exercice 23** *Soit f périodique,dérivable sur $\mathbb{R}$, justifier que f' est également périodique. Si T est une période de f', est-ce également une période de f ? En d'autres termes, lorsque l'on dérive, peut-on obtenir une période plus petite. On admettra qu'une fonction continue et périodique est bornée.*

★**Exercice 24** *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant deux centres de symétries distincts. Montrer que f est la somme d'une fonction périodique et d'une fonction linéaire (la décomposition est-elle unique ?).*

★**Exercice 25** *La fonction f vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+3) f(x-3)$. Montrer que f est périodique.*

Exercice 26 *Déterminer toutes les fonctions à la fois monotones et périodiques.*

Exercice 27 *Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}}$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$). Montrer que $f = Id_{\mathbb{R}}$ (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$).*

Exercice 28 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on suppose que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.*

Exercice 29 *Trouver toutes les applications f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que*

① $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) f\left(x^2 - 1\right) = \sin(x)$. ② $\forall x \in \mathbb{R}$, $xf(x) + f(1-x) = x^3 + 1$.
③ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) + f(y)| = |x + y|$. ④ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) f(y) - f(xy) = x + y$.

Dérivée, variations des fonctions

Exercice 30 *Quel est le point d'intersection de la tangente en M d'abscisse a au graphe de la fonction exponentielle et l'axe Ox ?*

Exercice 31 *Montrer que le graphe de la fonction exponentielle est toujours au dessus sa tangente à l'origine.*

Exercice 32 *Soit f définie par $f(x) = \ln x$.*

1. *Quel est le domaine de définition de f ? Donner l'équation de la tangente T_a au point d'abscisse a.*
2. *Soit $g(a)$ l'abscisse du point d'intersection de T_a et de l'axe Ox. Préciser g, tracer le graphe de g.*
3. *Dans quel ensemble doit-on choisir α pour qu'il passe par le point $M(\alpha, 0)$ deux tangentes à $\mathcal{C}_f$?*

Exercice 33 *Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.*

1. *Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x = 0$ sont parallèles.*
2. *Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x = 1$ sont concourantes.*

Exercice 34 *Soit f définie sur I, deux fois dérivable telle que $f'' \geq 0$ sur I.*

1. *Soit $y = T_a(x)$ l'équation de la tangente à f au point d'abscisse a, donner l'expression de $T_a(x)$.*
2. *On pose $g(x) = f(x) - T_a(x)$, représenter $g(x)$ sur un schéma. Etudier les variations de g (il peut être judicieux de dériver deux fois).*
3. *En déduire que le graphe de f est au dessus de ses tangentes (on dit que f est convexe sur I).*

Exercice 35 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \sin(2x) + 2\cos(x)$. Montrer que le graphe de f admet un centre de symétrie. Etudier les variations de f sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ (pourquoi cet intervalle ?).*

Exercice 36 *Soit f définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, montrer que f admet un centre de symétrie. Etudier les variations de f sur son domaine de définition. Déterminer les x tels que $-1 \leq f(x) \leq 2$.*

Exercice 37 *Soit f définie par $f(x) = \ln(x-1) + \ln(5-x)$. Déterminer D_f, montrer que le graphe admet un axe de symétrie. Etudier les variations de f.*

★**Exercice 38** *Soit f définie par $f(x) = \tan(x)\exp\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sin x}\right)$. Déterminer D_f, étudier la périodicité de f. Calculer $f(\pi - x)$, en déduire l'existence d'un axe de symétrie. Etudier les variations de f (sur l'intervalle d'étude le plus petit possible, on ne demande pas les limites aux bords). Déterminer le minimum de f sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.*

Exercice 39 *Tracer le graphe de f définie par $f(x) = |x-1| + 2|x+2|$. Résoudre, graphiquement, $f(x) = 5$, $f(x) \geq 6$.*

Exercice 40 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n(x) = (1+e^x)^n$. A l'aide du binôme, donner deux expressions de f_n'. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. Comment procéder pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$?*

Exercice 41 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{(1-i)(1+xi)}{x+i}\right)$. Donner, à l'aide du graphe de f, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Préciser $f^{-1}\left(\left[-\sqrt{2}, 1\right]\right)$ et $f(]-\infty, 0])$.*

Exercice 42 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \leq f(x)$.*

1. *Etudier les variations de $g : x \longmapsto e^{-x}f(x)$.*
2. *En déduire f.*

Exercice 43 *Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ (dériver deux fois ...).*

Exercice 44 *On sait que $\forall x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$.*

1. *Montrer que $\forall x \geq 0$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ puis que $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x)$.*
2. *On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Donner un encadrement de u_n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.*

Exercice 45 *A l'aide d'une étude de fonctions, préciser le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{\ln x}{x} = m$ où m est un paramétre. Résoudre l'équation pour $m = \ln\sqrt{2}$.*