Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $V_1 = (-1, 1, -1)$, $V_2 = (1, 2, 4)$, $V_3 = (3, -1, a)$ et $V_4 = (2, 3, b)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}$. Soit $F = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(V_3, V_4)$, on veut déterminer a et b pour que $F = G$. En écrivant que $V_3 \in F$, trouver a et exprimer V_3 comme combinaison linéaire de V_1 et V_2. Faire de même avec V_4 et conclure.*

Exercice 2 *Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y - z + t = 0\}$, $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y = x - t = 0\}$, $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y = z = -t\}$. Déterminer pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, une famille de vecteurs qui engendre F_i. Déterminer $F_1 \cap F_2$, $F_1 \cap F_3$, $F_2 \cap F_3$. Montrer que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^4$, $F_1 + F_3 = \mathbb{R}^4$, $F_2 + F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, x = -2\alpha + \gamma\, ,\ y = \alpha + \gamma\, ,\ z = \beta + \gamma\, ,\ t = -2\alpha - \gamma\}$.*

Exercice 3 *Soit $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\right\}$, montrer que F est un plan vectoriel (i.e. est engendré par deux vecteurs non colinéaires).*

Exercice 4 *Soit $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\right\}$ et $G = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n\right\}$.*

1. *Montrer que F et G sont des plans vectoriels.*
2. *Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.*

Exercice 5 *Soit $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\right\}$ et $G = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n\right\}$*

1. *Montrer que F et G sont des plans vectoriels.*
2. *Montrer que si $u \in F \cap G$, alors u est constante. En déduire $F \cap G$.*

Exercice 6 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sous ev de E. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $F \cup G$ est un sous ev de E
(ii) $F \cup G = F + G$
(iii) $F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice 7 *Soit E un ev et V_1, V_2 et V_3 trois sous ev de E. Montrer que $(V_1 \cap V_3) + (V_2 \cap V_3) \subset (V_1 + V_2) \cap V_3$ prouver, par un contre exemple, que l'inclusion est stricte en général.*

Exercice 8 *Soit E un espace vectoriel et F, G et H trois sous ev de E vérifiant : $F \cap G = F \cap H$, $F + G = F + H$ et $G \subset H$. Montrer que $G = H$.*

Sommes directes

Exercice 9 *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, on note $F = \{P \in E,\ P(1) = 0\}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $G_\alpha = \mathrm{Vect}(X - \alpha)$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $F \oplus G_\alpha = E$.*

Exercice 10 *Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E,\ f(1)) = 0\}$ et $G = \{f \in E,\ \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.*

Exercice 11 *Soit E un $K-ev$, on considère trois sous-espaces vectoriels F, G et H tels que $F + H = G + H$, $F \cap H = G \cap H$ et $F \subset G$. Montrer que $F = G$.*

Exercice 12 *Soit E un $K - ev$, on considère quatre sous-espaces vectoriels F, G, H et K tels que $E = F \oplus G = H \oplus K$, $F \subset H$ et $G \subset K$. Montrer que $F = H$ et $G = K$.*

Famille libres, liées, bases

Exercice 13 *Dans $\mathbb{R}^2$, les familles suivantes sont-elles liées ou libres ?*

$$\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \qquad \overrightarrow{a} = (1, 2)\,, \qquad \overrightarrow{b} = (2, 3)$$
$$\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \qquad \overrightarrow{a} = (2m, 3 - m)\,, \qquad \overrightarrow{b} = (6 + m, 4m - 6) \qquad \text{où } m \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \qquad \overrightarrow{a} = (1, -2)\,, \qquad \overrightarrow{b} = (3, 6)\,, \qquad \overrightarrow{c} = (8, -4)$$
$$\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) \qquad \overrightarrow{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha) \qquad \overrightarrow{b} = (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$$

Exercice 14 *Dans $\mathbb{R}^3$, les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? Dans le dernier cas, donner une relation de dépendance.*

$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) \quad \overrightarrow{a}=(1,2,1), \quad \overrightarrow{b}=(1,-1,3), \quad \overrightarrow{c}=(0,3,-1)$$
$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) \quad \overrightarrow{a}=(1,-1,1), \quad \overrightarrow{b}=(1,0,1), \quad \overrightarrow{c}=(0,1,0)$$
$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) \quad \overrightarrow{a}=(0,1,0), \quad \overrightarrow{b}=(1,2,1), \quad \overrightarrow{c}=(0,3,0)$$
$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right) \quad \overrightarrow{a}=(1,3,2), \quad \overrightarrow{b}=(3,-2,1) \quad \overrightarrow{c}=(0,0,0), \quad \overrightarrow{d}=(-2,1,-1)$$
$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right) \quad \overrightarrow{a}=(1,1,1), \quad \overrightarrow{b}=(1,4,1), \quad \overrightarrow{c}=(1,5,6), \quad \overrightarrow{d}=(0,1,1)$$
$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right) \quad \overrightarrow{a}=(m,1,1), \quad \overrightarrow{b}=(1,m,1), \quad \overrightarrow{c}=(1,1,m) \quad \text{où } m\in\mathbb{R}$$

Exercice 15 *Les familles suivantes sont-elles libres ou liées dans $\mathbb{R}^4$?*

$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right) \quad \overrightarrow{a}=(1,2,-1,2), \quad \overrightarrow{b}=(1,3,2,-6)$$
$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right) \quad \overrightarrow{a}=(1,0,0,1), \quad \overrightarrow{b}=(0,1,1,0), \quad \overrightarrow{c}=(1,0,1,0), \quad \overrightarrow{d}=(1,-1,1,-1)$$
$$\mathcal{F}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}\right) \quad \overrightarrow{a}=(1,1,-1,m), \quad \overrightarrow{b}=(m,1,1,3), \quad \overrightarrow{c}=(0,1,0,1), \quad \overrightarrow{d}=(1,-1,1,m)$$

Exercice 16 *Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs d'un espace vectoriel E. On définit $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{k}-\overrightarrow{i}$. Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)$ est liée.*

Exercice 17 *Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1=(-3,-2,-1,3)$, $v_2=(1,0,2,4)$, $v_3=(1,-3,\lambda,\mu)$ où (λ,μ) sont des réels. Trouver λ et μ pour que ces trois vecteurs soient liés.*

Exercice 18 *On se place dans $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les familles suivantes sont-elles libres ?*

(f,g,h) *avec pour* $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$, $h(x)=1$
(f,g,h) *avec pour* $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=\cos^2 x$, $h(x)=1$
(f,g,h) *avec pour* $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\cos x$, $g(x)=\cos 2x$, $h(x)=1$
(f,g,h) *avec pour* $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\cos^2 x$, $g(x)=\cos 2x$, $h(x)=1$
(f,g,h) *avec pour* $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin(x+1)$, $h(x)=\sin(x+2)$
(f,g,h) *avec pour* $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin\left(x^2\right)$, $h(x)=\sin\left(x^3\right)$

Exercice 19 *Montrer que les applications $f:x\longmapsto|x|$, $g:x\longmapsto|x-1|$ et $h:x\longmapsto|x+1|$ forment une famille libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

Exercice 20 *Dans $E=\mathbb{R}^3$, soit $F=\{(x,y,z)\,,\,2x-y+z=0\}$, justifier que F est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base. Pour quelle valeur de m, le vecteur $\overrightarrow{a}=(1,m,1)$ est-il dans F ? Donner alors ses coordonnées dans la base que vous avez choisi.*

Exercice 21 *Soit $\mathcal{B}=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ une base de $\mathbb{R}^3$, justifier que $\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\overrightarrow{k}+\overrightarrow{i}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 22 *Soit $\mathcal{B}=\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ une base de $\mathbb{R}^3$, la famille $\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}\right)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?*

Exercice 23 *Soit $\overrightarrow{u}=(1,2,-1)$ et $\overrightarrow{v}=(-1,2,1)$, compléter la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ en une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 24 *Les vecteurs $\overrightarrow{a}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{c}=(2,1,3)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner les coordonnées de $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$ dans cette base en fonction de x,y et z.*

Exercice 25 *Montrer que, dans $\mathbb{R}^3$, $\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)$ où $\overrightarrow{a}=(m,1,-m)$, $\overrightarrow{b}=(1,2m,m)$ et $\overrightarrow{c}=(2,2,-1)$ est une base pour tout $m\in\mathbb{R}$. Donner les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$ dans cette base en fonction de x,y et z.*

Exercice 26 *Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x+y=z+t=0\}$, donner une base de F ainsi que les coordonnés de $a=(2,-2,-1,1)$ dans cette base.*

Exercice 27 *Donner une base de* $F = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ solution de } y'' - 3y' + 3y = 0 \right\}$.

Exercice 28 *Donner une base de* $F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0 \right\}$.

Exercice 29 *Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Montrer que $(e_1, e_2 + 2e_3, 2e_2 + e_3)$ est une base de E. Quels sont les vecteurs ayant même coordonnées dans les deux bases ?*

Exercice 30 *Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\mathcal{F} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ où $Q_1 = X^2 + 1,\ Q_2 = 3X^2 - X + 3$ et $Q_3 = X^2 - X + 1$ est-elle une base ? Si oui donner les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans cette nouvelle base.*

Exercice 31 *Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $f_k : x \mapsto e^{kx}$ pour $k \in \{0, \cdots n\}$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre. Même question avec $g_k : x \mapsto \sin^k(x)$.*

Exercice 32 *Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \longmapsto |x - k|$. Montrer que la famille $(f_0, \cdots, f_n)$ est libre.*

Exercice 33

1. *Soient p et q deux entiers naturels non nuls, calculer* $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \sin(pt)\sin(qt)\,dt$.
2. *Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par $f_k(x) = \sin(kx)$. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.pour $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire de la famille $(f_0, \cdots, f_n)$? Que pensez-vous de la famille $(g_0, \cdots, g_n)$ où $g_k(x) = \cos(kx)$?*

Exercice 34 *Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère $f_k : x \mapsto e^{kx}$ pour $k \in \{0, \cdots n\}$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre. Même question avec $g_k : x \mapsto \sin^k(x)$.*

Exercice 35 *Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère pour $k \in \mathbb{N}$, $f_k : x \longmapsto |x - k|$. Montrer que la famille $(f_0, \cdots, f_n)$ est libre.*

Exercice 36

1. *Soient p et q deux entiers naturels non nuls, calculer* $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \sin(pt)\sin(qt)\,dt$.
2. *Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_k par $f_k(x) = \sin(kx)$. Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est libre.pour $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire de la famille $(f_0, \cdots, f_n)$? Que pensez-vous de la famille $(g_0, \cdots, g_n)$ où $g_k(x) = \cos(kx)$?*