EXERCICE 1 :

On étudie l'équation algébrique (E) : $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

d'inconnue x, et dont les coefficients a_i sont des entiers (pour $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$
Montrer que les solutions réelles de (E) sont entières ou irrationnelles.

EXERCICE 2 :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit A une partie de E. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
2. En considérant l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, montrer que l'inclusion précédente n'est pas une égalité.
3. Soit B une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
4. En considérant l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$, montrer que l'inclusion précédente n'est pas une égalité.

EXERCICE 3 :

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que :

$\triangleright$ f est injective $\Leftrightarrow \forall A$ partie de E, $A = f^{-1}(f(A))$.

$\triangleright$ f est surjective $\Leftrightarrow \forall B$ partie de E, $f^{-1}(f(B)) = B$.

EXERCICE 4 :

Soit E, F et G trois ensembles, $f_1, f_2 : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

On suppose que $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et que g est injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

EXERCICE 5 :

Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

Montrer que f est injective si, et seulement si, $\forall A, A' \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

EXERCICE 6 :