Devoir surveillé 6 correction

Exercice 1.

1. Comme $M(0,0) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \in A$, l'ensemble A est non vide. On remarque que
$$M(a,b) = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Pour $M(a,b), M(a',b') \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a donc
$$\begin{aligned} M(a,b) + \lambda M(a',b') &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \lambda\left(a'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (a+\lambda a')\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (b+\lambda b')\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= M(a+\lambda a', b+\lambda b') \in A \end{aligned}$$
On conclut donc que
$$\boxed{A \text{ est non vide et stable par combinaisons linéaires.}}$$

2. On calcule
$$M(0,b)^2 = b^2\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$
On a donc $\boxed{M(0,b)^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.}$

3. Pour $M(a,b), M(a',b') \in A$, on a donc
$$\begin{aligned} M(a,b)\cdot M(a',b') &= \left(a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(a'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) \\ &= aa'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (a'b+ab')\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + bb'\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^2 \\ &= aa'\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (ab+a'b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M(aa', ab'+a'b) \in A \end{aligned}$$
On conclut $\boxed{A \text{ est stable par produit matriciel.}}$

4. On remarque que $M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ commutent, on peut donc appliquer le binôme de Newton et on a
$$\begin{aligned} (M(a,b))^n &= (aM(1,0) + bM(0,1))^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} b^k M(0,1)^k a^{n-k} M(1,0)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^{n-k} b^k M(0,1)^k. \end{aligned}$$
Grâce à la question 2, on a $M(0,1)^k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, dés que $k \geq 2$. Il en résulte

$$\boxed{(M(a,b))^n = a^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + na^{n-1}b\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2\end{pmatrix}.}$$

5. (a) On a

$$(M(a,b))^n = \begin{pmatrix} a^n + 2na^{n-1}b & -4na^{n-1}b \\ na^{n-1}b & a^n - 2na^{n-1}b \end{pmatrix}$$

Pour le coefficient (2,1) $na^{n-1}b$ est une limite nulle, quand n tend vers $+\infty$, les croissances comparées nous imposent que soit $b = 0$ ou $|a| < 1$. Si $|a| < 1$, tous les coefficients tendent vers 0. Si $b = 0$, on a alors

$$M(a,0) = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

On obtient donc bien que $|a| < 1$ est alors nécessaire et suffisant. On conclut donc bien que

$$\boxed{|a| < 1 \text{ est une condition nécessaire et suffisante pour que la suite } (U_n) \text{ converge vers la matrice nulle.}}$$

(b) Les résultats sur les suites géométriques nous donnent directement :

$$\boxed{S_n(x) = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}}$$

(c) Pour $x \in]-\infty, 1[$, l'intervalle de bornes 0 et x ne contient pas 1, on peut donc intégrer l'égalité de la question précédente entre 0 et x et on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\mathrm{d}t.$$

On conclut donc bien que

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 1[, \quad H_n(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\mathrm{d}t.}$$

(d) Pour $x \in]-\infty, 1[$, le segment de bornes 0 et x ne contient pas 1 et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,x]$ si $x \geq 0$(respectivement $[x,0]$ si $x < 0$). Il existe donc M_x tel que

$$\forall t \in [0,x](\text{respectivement } [x,0] \text{ si } x < 0), \qquad \left|\frac{1}{1-t}\right| \leq M_x.$$

On en déduit que, si $|x| < 1$,

$$\left|\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\mathrm{d}t\right| \leq M_x \int_0^{|x|} t^{n+1}\mathrm{d}t = M_x \frac{|x|^{n+2}}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on conclut donc bien que

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad H_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x).}$$

(e) On calcule

$$\begin{aligned} V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{M(a,b)^k}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{k}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}b\right)\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2\end{pmatrix} \\ &= H_{n-1}(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + bS_{n-1}(a)\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

On conclut donc

$$\boxed{V_n = H_{n-1}(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bS_{n-1}(a)\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

(f) Si $|a| < 1$, on a, grâce à la question 5.(e) $H_{n-1}(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-a)$. De plus, sous la même hypothèse, on a $S_{n-1}(a) = \frac{1-a^n}{1-a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-a}$. On peut don conclure que

$$\boxed{\text{si } |a| < 1, \text{ alors } V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -\ln(1-a) + \frac{2b}{1-a} & -\frac{4b}{1-a} \\ \frac{b}{1-a} & -\ln(1-a) - \frac{2b}{1-a} \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ par

1. Déterminons une matrice échelonnée équivalente à $A(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -3-\lambda \\ -2-\lambda & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_2 + (2+\lambda)L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -3-\lambda \\ 0 & 2+(2+\lambda)(-3-\lambda) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le rang de la matrice est 2, si et seulement si $-\lambda^2 - 5\lambda - 4 = 2 + (2+\lambda)(-3-\lambda) \neq 0$. Les racines de $-\lambda^2 - 5\lambda - 4 = 0$ étant -1 et -4, on conclut

$$\boxed{A(\lambda) \text{ est non inversible si et seulement si } \lambda \in \{-1; -4\}.}$$

2. On transforme le système et on a alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2y & = & 0 \\ x - 2y & = & 0. \end{array} \right.$$

On trouve donc que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

3. On transforme le système et on a alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 0 \\ x + y & = & 0. \end{array} \right.$$

On trouve donc que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

4. On a donc $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On résout

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & a \\ x - y & = & b \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & a \\ 3x & = & a + b. \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & a \\ x & = & \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b. \end{array} \right.$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ y & = & \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b. \end{array} \right.$$

On conclut

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.}$$

5. On calcule

$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.}$$

6. Soit le système différentielle (E)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & -2x+2y \\ y'' & = & x-3y \end{array}\right.$$

Pour (x,y) solution, on définit les fonctions u et v par $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) Le couple (x,y) est solution de (E) est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Les calculs précédents nous donnent

$$M = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Il en résulte

$$P^{-1}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Par linéarité, on a donc

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

On conclut, que le couple (u,v) vérifie

$$\boxed{(E')\left\{\begin{array}{rcl} u'' & = & -u \\ v'' & = & -4v \end{array}\right.}$$

(b) Grâce à la question précédente, u et v vérifient 2 équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Les équation caractéristiques sont respectivement $\alpha^2+1=0$ et $\alpha^2+4=0$. On obtient donc

$$\mathcal{S}_{E',\mathbb{R}} = \left\{(u,v) = (t\mapsto \alpha_1\cos(t)+\alpha_2\sin(t), t\mapsto \beta_1\cos(2t)+\beta_2\sin(2t)) \quad ; \quad (\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^4\right\}.$$

Puis comme toutes les opérations sont des équivalences, on a multiplié par des matrices inversibles. On obtient toutes les solutions de (E) grâce à

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\mapsto 2\alpha_1\cos(t)+2\alpha_2\sin(t)+\beta_1\cos(2t)+\beta_2\sin(2t) \\ t\mapsto \alpha_1\cos(t)+\alpha_2\sin(t)-\beta_1\cos(2t)-\beta_2\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

On conclut donc

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{S}_{E,\mathbb{R}} = \{(x,y) = (t\mapsto 2\alpha_1\cos(t)+2\alpha_2\sin(t)+\beta_1\cos(2t)+\beta_2\sin(2t), \\ \qquad\qquad t\mapsto \alpha_1\cos(t)+\alpha_2\sin(t)-\beta_1\cos(2t)-\beta_2\sin(2t));(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^4\}. \end{array}}$$

Problème :

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on définit la suite $(u_n(x))$ par

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(u_n(x))^2}{n+1}. \end{cases}$$

L'expression $u_n(x)$ définit donc une fonction u_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

On se propose d'étudier le comportement de la suite $(u_n(x))$.

Etude de u_n et détermination de la limite de la suite $(u_n(x))$ (si elle existe).

1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a $u_0(x) = x \geq 0$, puis pour $n > 0$, on a $u_n(x) = \frac{u_{n-1}(x)^2}{n} \geq 0$, car carré d'un nombre réel diviser un entier positif. On conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(x) \geq 0.}$$

2. Montrons le résultat par récurrence sur n.
   Initialisation :
   La fonction $u_0 = x \mapsto x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   Hérédité :
   Supposons qu'à un rang n fixé, u_n est strictement croissante.
   La fonction $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, comme fonction puissance. Donc comme u_n est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par composition de fonctions strictement croissantes, on conclut que $u_{n+1} = f_n \circ u_n$ est strictement croissante. La propriété est donc héréditaire.
   On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{la fonction } u_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

3. Montrons par récurrence sur n que $u_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Initialisation :
   La fonction $u_0 = x \mapsto x$ vérifie clairement la propriété.
   Hérédité :
   Supposons qu'à un rang n fixé, $u_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   La fonction $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n+1}$ vérifie $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par composition des limites, on a donc $u_{n+1}(x) = f_n \circ u_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   On conclut

x	0	$+\infty$
		$+\infty$
$u_n(x)$	0 $\nearrow$	

4. Comme u_n est continue par composition et strictement croissante, on conclut

$$\boxed{u_n \text{ définit une bijection de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } u_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+.}$$

5. La fonction $u_0 = x \mapsto x$ est sa propre réciproque est donc dérivable par les règles usuelles sur $\mathbb{R}^+$.
Si $n > 0$, on remarque $u_n'(x) = \frac{2}{n} u_{n-1}(x) u_{n-1}'(x)$. On en déduit que la dérivée s'annule en x si $u_{n-1}(x) = 0$ ou si $u_{n-1}'(x) = 0$. On en déduit par une récurrence à rédiger que pour $n > 0$, la dérivée de u_n s'annule seulement en 0, donc u_n^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{u_n(0)\} = \mathbb{R}^{+*}$.
On conclut que

$$\boxed{\text{la fonction réciproque de } u_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^+ \text{ si } n = 0 \text{ et sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ si } n > 0.}$$

6. Comme $u_{n+1}(x) = \frac{(u_n(x))^2}{n+1}$, si la suite $(u_n(x))$ converge vers limite finie ℓ, par opérations sur les limites, on obtient $\ell = 0\ell$.
On conclut que

$$\boxed{\text{si la suite } (u_n(x)) \text{ converge vers limite finie } \ell, \text{ alors nécessairement } \ell = 0.}$$

Bassins d'attraction :

On note

$$E_0 = \left\{ x\,;\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \quad E_\infty = \left\{ x\,;\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \right\}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $u_N(x) \leq N + 1$.
   (a) Montrons par récurrence sur n que

$$\forall n \geq N, \quad u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \leq n + 1.$$

Initialisation :
Pour $n = N$, on a bien $u_n(x) \leq n + 1$. C'est l'hypothèse. On en déduit donc que $\frac{u_n(x)}{n+1} \leq 1$.
Il en résulte, comme tout est positif et $n \geq 0$, que

$$u_{n+1}(x) = \frac{(u_n(x))^2}{n+1} = u_n(x) \cdot \frac{u_n(x)}{n+1} \leq u_n(x) \leq n + 1.$$

Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, on a $u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \leq n + 1$.
On en déduit que $u_{n+1}(x) \leq n + 2$, puis $\frac{u_{n+1}(x)}{n+2} \leq 1$
Il en résulte, comme tout est positif et $n \geq 0$, que

$$u_{n+2}(x) = \frac{(u_{n+1n}(x))^2}{n+2} = u_{n+1}(x) \cdot \frac{u_{n+1}(x)}{n+2} \leq u_{n+1}(x) \leq n + 2.$$

La propriété est donc héréditaire.
On résulte donc que

$$\forall n \geq N, \quad u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \leq n + 1.$$

On conclut donc que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n(x)) \text{ est décroissante à partir du rang } N.}$$

   (b) La suite $(u_n(x))$ est donc décroissante minorée par 0, elle converge vers une limite finie et par la question 6, cette limite est 0.
On conclut que

$$\boxed{x \in E_0.}$$

(c) On remarque $u_0(1) = 1 \leq 0 + 1$, donc la propriété « $u_N(1) \leq N + 1$ » est vérifiée pour $N = 0$. On peut donc conclure que que

$$\boxed{1 \in E_0.}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, tel que la suite $(u_n(x))$ ne converge pas vers 0.

(a) Le résultat de la question 7 est si il existe N tel que $u_N(x) \leq N+1$, alors $x \in E_0$. Si $x \notin E_0$, il faut donc nier la propriété et on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) > N + 1.$$

Par le théorèmes des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\boxed{u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(b) Supposons $x \notin E_0$, grâce à la question précédente, on $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $x \in E_\infty$. On conclut que

$$\boxed{\mathbb{R}^+ = E_0 \cup E_\infty.}$$

(c) Montrons par récurrence que

$$\forall n \geq 0, \quad u_n(2) \geq n + 2.$$

Initialisation :
Pour $n = 0$, on a bien $u_0(2) = 2 \leq 0 + 2$.
Hérédité :
Supposons qu'à un rang n fixé, on a $u_n(2) \geq n + 2$. On a alors

$$u_{n+1}(2) = \frac{u_n(2)^2}{n+1} \geq \frac{(n+2)^2}{n+1} = n + 3 + \frac{(n+2)^2}{n+1} - n - 3 = n + 3 + \frac{1}{n+1} \geq n + 3.$$

Par le théorèmes des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\boxed{u_n(2) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \text{ soit } 2 \in E_\infty.}$$

(d) Soit $x > 2$, comme la fonction u_n est croissante, on a

$$u_n(2) \leq u_n(x).$$

Par le théorèmes des gendarmes, on peut donc conclure que $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, soit $x \notin E_0$. On conclut que

$$\boxed{2 \text{ majore } E_0.}$$

9. E_0 est une partie de $\mathbb{R}$ non vide $(1 \in E_0)$ majorée par 2, on conclut

$$\boxed{E_0 \text{ admet une borne sup } \delta.}$$

10. Soit $x > \delta$, on a donc $x \notin E_0$, d'où $x \in E_\infty$. Il en résulte que

$$\forall x > \delta, \quad x \in E_\infty,$$

soit $]\delta, +\infty[\subset E_\infty$.
Soit $x < \delta$, par caractérisation de la borne il existe donc $y \in E_0$ tel que $x < y \leq \delta$, comme u_n est croissante, on a

$$0 \leq u_n(x) \leq u_n(y).$$

Comme $y \in E_0$, on a donc $u_n(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorèmes des gendarmes, on peut donc conclure que $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et il en résulte

$$\forall x < \delta, \quad x \in E_0,$$

soit $[0, \delta[\subset E_0$.
Il reste donc à savoir si $\delta \in E_0$ ou $\delta \in E_\infty$ et on conclut qu'il y a 2 possibilités :

$$\boxed{(E_0 = [0, \delta[\text{ et } E_\infty = [\delta, +\infty[) \text{ ou } (E_0 = [0, \delta] \text{ et } E_\infty =]\delta, +\infty[)}$$

Justifier que E_0 et E_∞ sont des intervalles. On précisera les différentes possibilités pour E_0 et E_∞ en utilisant δ.