Devoir surveillé 5

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1.

Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$

1. Justifier que f en dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
2. Montrer $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[0,1]$.
3. Pour $t \in [0,1]$, comparer $\sin(t)$ et t.
4. En déduire que
$$\forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y| .$$
5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, montrer que la suite converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 2.

On définit la fonction th par $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

1. Justifier que th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On note $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
2. Exprimer la dérivée de f en fonction de f et en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$
3. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = 0$.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction th.

Exercice 3.

On cherche à déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ continue en 0 valant 2 en 0 et tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)\cos(x).$$

1. Soit f une solution du problème, montrer que
$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, (sous réserve que les objets soient définies), on a
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$
3. Déterminer les solutions du problème.

Exercice 4. On cherche à déterminer toutes les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}.$$

1. Soit f une fonction solution, déterminer les valeurs possibles pour $f(0)$, on notera A l'ensemble de ses valeurs.
2. Soit $x_0 \in A\backslash\{0\}$, montrer qu'il existe une unique fonction solution du problème tel que $f(0) = x_0$. On explicitera cette solution.
3. On suppose maintenant que la fonction f est une solution tel que $f(0) = 0$.
   (a) Etudier la parité de f.
   (b) Objectif, montrer que $f(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.
      i. On suppose l'existence de x_0 tel que $f(x_0) = 1$, déterminer $f\left(\frac{x_0}{2}\right)$. Généraliser.
      ii. Conclure.
   (c) Soit la fonction g définit par $g(x) = \frac{1-f(x)}{f(x)+1}$.
      i. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$. On précisera sa régularité.
      ii. Simplifier l'expression $g(x+y) - g(x)g(y)$.
      En déduire qu'il existe un réel a, tel que g vérifie l'équation fonctionnelle :
      $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) = a\, g(y)g(x).$$
      iii. Déterminer les fonctions g solution de l'équation fonctionnelle de la question précédente.
      iv. Déterminer les solutions f du problème initial.
4. Déterminer l'ensemble des solutions du problème initial.

Exercice 5.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation

$$\mathrm{e}^x + nx^2 - 3 = 0.$$

1. Justifier qu'elle admet une unique solution positive que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ. (On pourra étudier $\mathrm{e}^{x_n} + (n+1)x_n^2 - 3$)
3. Déterminer ℓ.
4. Déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n - \ell)$ que l'on notera δ_n.
5. Déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n - \ell - \delta_n)$.