Devoir surveillé 3

Consignes :

- Calculatrice interdite.
- Ne mélanger pas les exercices, une nouvelle copie pour chaque exercice.
- Numéroter chaque copie et mettre son nom sur chaque feuille.
- Encadrer les résultats.
- Les phrases d'explications courtes et claires avant tout calcul peut permettre de gagner des points.
- Les copies dont la propreté et la présentation laissent à désirer seront sanctionnées (Les ratures et les plaques de blanc correcteur sont à bannir).

Exercice 1. Calculer les limites aux points indiqués :

1. $\dfrac{\operatorname{sh}(x) - \sin(x)}{\tan(x) - x}$ en $x = 0$.
2. $\dfrac{e^{3x} - e^{2x} - \sin(x)}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x} - \frac{x}{2}}$ en $x = 0$.
3. $\dfrac{e^{x^2+1} - e^{2x}}{\ln(x) - x + 1}$ en $x = 1$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(\ln(1+x))^n} - \dfrac{1}{x^n}$ en $x = 0$.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, résoudre

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos(x)^k} = 0.$$

Exercice 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \frac{1}{(\operatorname{ch} t)^n}$. On a associe à f_n, F_n sa primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Si F_n admet une limite finie en $+\infty$, on notera u_n cette limite.

1. Exprimer sous forme réduite $F_n(x)$ pour $n \in [\![0, 2]\!]$.
   (On pourra faire un changement de variable exponentielle pour $n = 2$.)
2. Déterminer, si elle existe, la valeur de u_n, pour $n \in [\![0, 2]\!]$.
3. En utilisant une intégration par partiessur $F_n(x) - F_{n+2}(x)$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2}(x) = \frac{n}{n+1} F_n(x) + \frac{\operatorname{sh} x}{(n+1)\,(\operatorname{ch} x)^{n+1}}.$$

4. Montrer que $\forall n \geq 1$, la fonction F_n admet une limite finie en $+\infty$ et donner une relation de récurrence vérifié par la suite (u_n).
5. Déterminer un développement limité d'ordre 5 en 0 de F_n.

Exercice 4.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} z^k = 0. \qquad (E_n)$$

1. Résoudre l'équation
$$(1+z)^n + (1-z)^n = 0.$$
(On pourra se ramener à une racine n-ème.)
2. On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta = \alpha^2$, exprimer de manière réduite $\sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{n}{2k} \beta^k$ en utilisant α.
3. Résoudre (E_n), on précisera le nombre de solutions distinctes.

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbb{R}^+$, déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tel que

$$\frac{|z|}{|z-1|} = a.$$

(On pourra passer en coordonnées cartésiennes.)