Calculs élémentaires

Exercice 1 *Calculer les déterminants suivants :*

$$① \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad ② \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \quad ③ \begin{vmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{vmatrix}$$

Exercice 2 *Calculer les déterminants suivants:*

$$① \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \quad ② \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad ③ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 3 *Justifier, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par* 6 : $\begin{vmatrix} 3 & 27 & 666 \\ 4255 & 31 & 1724 \\ 62 & 23 & 8 \end{vmatrix}$.

Exercice 4 *Soit* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $F = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *un plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$, *donner une équation cartésienne de* F.

Exercice 5 *Calculer de deux manières (avec Sarrus ou en sommant les colonnes), le déterminant suivant* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. *Quelle factorisation obtient-on ?*

Exercice 6 *Calculer de deux manières* $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$. *Déterminer deux entiers* p *et* q *tels que* $p^2 + q^2 = 793$. *On remarquera que* $2^2 + 3^2 = 13$ *et que* $5^2 + 6^2 = 61$ *et que* $13 \times 61 = 793$.

Calculs par opérations sur les lignes et colonnes

Exercice 7 *Calculer les déterminants suivants:*

$$① \begin{vmatrix} 2b & b-c-a & 2b \\ a-b-c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad ② \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix} \quad ③ \begin{vmatrix} 1 & b+c & \left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right) \\ 1 & a+c & \left(1+a^2\right)\left(1+c^2\right) \\ 1 & a+b & \left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) \end{vmatrix}$$

$$④ \begin{vmatrix} a & b+c & \left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right) \\ b & a+c & \left(1+a^2\right)\left(1+c^2\right) \\ c & a+b & \left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) \end{vmatrix} \quad ⑤ \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (c+b)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (a+c)^2 \end{vmatrix} \quad ⑥ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

$$⑦ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad ⑧ \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \quad ⑨ \begin{vmatrix} a & b & a & c \\ b & a & c & a \\ a & c & a & b \\ c & a & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 8 *Soient* C_1, C_2 *et* C_3 *trois colonnes de* $\mathbb{R}^3$. *On définit* $A = (C_1|C_2|C_3)$ *et* $B = (C_1 + C_2|C_2 + C_3|C_3 + C_1)$.

1. *Exprimer* $\det B$ *et fonction de* $\det A$.
2. *Soit* $D_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ *et* $D_2 = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+d^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+d^3 \end{vmatrix}$, *calculer* D_1 *et* D_2.

Exercice 9 *Soit* $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, *on pose* $A = \left(\left(a_{\max(i,j)}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.
Calculer $\det A$, *en déduire* $\det(\max(i,j))$ *et* $\det(\min(i,j))$. *Indication : rendre triangulaire.*

Exercice 10 *Soit* $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, *calculer*

$$① \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_2 \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} \quad ② \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 11 *Soit* $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *où* $a_{ij} = (-1)^{1+\min(i,j)}$. *Calculer* $\det(A)$

A l'aide des propritétés du déterminant

Exercice 12 *Soit* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *une matrice antisymétrique de taille* n. *Montrer que si* n *est impair alors* $\det A = 0$.

Exercice 13 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^t A = I_n$, *que peut valoir* $\det A$ *?*

Exercice 14 *Soient* $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ *une famille de* n *réels, calculer* $\det\left((\sin(a_i + a_j))_{1\leq i,j\leq n}\right)$.

Exercice 15 *Formules de Cramer : On considère le système* $AX = B$ *où* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(X, B) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

1. *Justifier que ce système admet une unique solution si et seulement si* $\det A \neq 0$.
2. *Lorsque* $\det A \neq 0$, *on note* $(x_1, \cdots, x_n)$ *cette solution et* $C_1, \cdots, C_n$ *les colonnes de* A. *Montrer que* $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det A}$ *où* A_i *est la matrice obtenue à partir de* A *en remplaçant la* $i-$*ième colonne par le second membre* B.
3. *Application : résoudre le système* $\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$

Exercice 16 *Soient* $a \neq b$ *et* $(c_1, \cdots, c_n)$ *dans* $\mathbb{R}$, *on définit pour* $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *par*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & c_n \end{pmatrix} \text{ et } f(x) = \det(A + xJ) \text{ où } J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Justifier que* f *est une fonction affine.*
2. *A l'aide de deux valeurs particulières, déterminer* f *puis* $\Delta = \det(A)$.

Exercice 17 *Soit* $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ *deux à deux distintcs on définit* $V(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

1. *On définit* $P(x) = V(a_1, \cdots, a_{n-1}, x)$, *justifier que* P *est un polynôme de degré au plus* $n-1$. *Préciser son coefficient dominant.*
2. *Déterminer les racines de* P, *en déduire la factorisation de* P.
3. *Donner la valeur de* $V(a_1, \cdots, a_n)$. *Que dire si deux des* $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ *sont égaux ?*

Exercice 18 *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *et* D_n *le déterminant de taille* n *défini par* $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$. *En utilisant la linéarité par rapport à la première colonne, donner une relation entre* D_n *et* D_{n-1} *puis calculer* D_n.

Exercice 19 *Pour* $n \geq 2$, *on pose* $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$ *et par convention* $D_1 = 2$

1. *En écrivant que la dernière colonne de D_n est la somme de deux colonnes simples, montrer que pour $n \geq 1$, on a $D_n = (n-1)! + nD_{n-1}$.*

2. *On pose alors $u_n = \dfrac{D_n}{n!}$, exprimer u_n en fonction de u_{n-1} puis déterminer u_n en fonction de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

Exercice 20 *Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on définit $c(A)$ par la ralation $Ac(A) = c(A)A = \det(A) I_n$. Calculer $c(c(A))$.*

Calcul par récurrence

Exercice 21 *Soit D_n le déterminant de taille n défini par $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$, montrer que $D_n = D_{n-2}$ et en déduire D_n.*

Exercice 22 *Soit D_n le déterminant de taille n défini par $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$, calculer D_n*

Exercice 23 *Soit n un entier ≥ 2. On considère le déterminant d'ordre n suivant :*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & n-1 \\ & 1 & & & (\bigcirc) & & n-2 \\ & & 1 & & & & n-3 \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & (\bigcirc) & & & 1 & & 2 \\ & & & & & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

1. *Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*

2. *Calculer le déterminant D_n.*

Exercice 24 *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et pour $n \geq 1$, $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & \bigcirc \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ \bigcirc & & b & a+b \end{vmatrix}$, montrer que $(D_n)_n$ est une suite récurrente d'ordre 2 puis calculer D_n.*

Application des déterminants

Exercice 25 *Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont inversibles (on discutera selon les paramètres dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

① $\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin x \\ -\sin 2x & \cos x \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} a & 2a-2 \\ a+3 & a-1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} e^x & -1 \\ 1-e^x & e^x-2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 26 *A quelle condition sur $a \in \mathbb{C}$ le système suivant admet-il un unique solution ?*

$$\left\{\begin{array}{ll} x + ay + a^2 z & = 1 \\ \overline{a}x + y + az & = 0 \\ \overline{a}^2 x + \overline{a}y + z & = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 27 *Les familles suivantes sont-elles des bases :*

① $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbb{R}^3$

② $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbb{R}^4$

③ $X(X-1)^2, X^2(X-1), (X-1)^3, (X+1)^3$ *dans* $\mathbb{R}_3[X]$

Exercice 28 *Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.*

1. *La famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \cdots, e_1 + \cdots + e_n)$ est-elle une base de E ?*
2. *On pose $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$, la famille $(s - e_1, \cdots, s - e_n)$ est-elle une base de E ?*
3. *La famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \cdots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$ est-elle une base de E ?*

Exercice 29 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = (x + y - z, x + 2y - z, 2x + y + z)$, justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 30 *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f(P) = (X-1)P' + P(1)$, justifier que f est un automorphisme.*

Exercice 31 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ définie par $f(P) = (X - \alpha)P' - nP$. Justifier que la famille $\left(\dfrac{(X-\alpha)^k}{k!}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que f est un automorphisme.*

Exercice 32 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F et G deux sous-espaces vectoriels supplèmentaires de E. Si s est la symétrie de base F et de direction G, donner la valeur de $\det s$ en fonction de $\dim G$.*

Exercice 33 *Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\det(A + M) = \det(A) + \det(M)$. Montrer que $\det A = 0$, puis que $A = 0$ (on utilisera le fait que si A est de rang r alors $A = PJ_rQ$).*

Exercice 34 *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence*

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ avec } u_1 \neq 0$$

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ u_1 & a \end{pmatrix}$ où $c = \dfrac{b}{u_1}$.

1. *Montrer que*
$$M^n = \begin{pmatrix} cu_{n-1} & \dfrac{cu_n}{u_1} \\ u_n & \dfrac{u_{n+1}}{u_1} \end{pmatrix}$$
2. *En déduire que pour $n \geq 0$, le terme $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ ne dépend que de b et de u_1 (penser $\det$).*
3. *Lorsque $b = -1$, $a = 2\operatorname{ch}\theta$ où $\theta > 0$ et $u_1 = 1$, calculer u_n en fonction de θ, puis exprimer la relation obtenue en 2).*