Manipulation sur les limites - Critère séquentiel

Exercice 1 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée et telle que* $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell > 0$. *Montrer que* $\ell = 0$. *(que dire si* $\ell < 0$ *ou* $\ell = \pm\infty$ *?).*

Exercice 2 *La fonction* f *définie par* $f(x) = \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ *admet-elle une limite en* $x = 0$ *?*

Exercice 3 *Montrer que* $f(x) = \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ *n'a pas de limite en* $+\infty$

Exercice 4 *Soit définie sur* $\mathbb{R}$ *et périodique de période* $T > 0$. *Montrer que*

$$f \text{ a une limite en } +\infty \iff f \text{ est constante sur } \mathbb{R}$$

Exercice 5 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue en* 0 *telle que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x)$.*Soit* $a \in \mathbb{R}$, *on pose* $u_n = f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$, *que dire de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *? En déduire* f.
Faire de même s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq 1$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) + \alpha f(x) = 0$.

Exercice 6 *Soit* $f :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *continue en* 0 *et telle que* $\forall x > -1,\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$. *On pose, pour* $x > -1,\ g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x+1}$. *Montrer que* $\forall x > -1,\ g(2x) = g(x)$. *En déduire* g *puis* f.

Exercice 7 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$ *et* $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. *Montrer que* $f = Id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 8 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue en* 0 *et en* 1 *telle que* $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x^2\right) = f(x)$.

1. *Quelle est la parité de* f *?*
2. *Soit* $x > 0$, *montrer que pour tout entier* $n \geq 0$, $f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f\left(x^{2^n}\right)$.
3. *En déduire que* f *est constante sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 9 *Déterminer toutes les fonctions* f *continues sur* $\mathbb{R}$ *telles que* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 10 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

1. *Calculer* $f(0)$, *quelle est la parité de* f *?*
2. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = n^2 f(x)$.
3. *Montrer que* $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r^2 f(1)$.
4. *En déduire* f.

Exercice 11 *Soit* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *vérifiant*

$$\forall x \in [0,1],\ 2x - f(x) \in [0,1] \text{ et } f(2x - f(x)) = x$$

1. *On pose* $g(x) = 2x - f(x)$, *montrer que* $g \circ g(x) = 2g(x) - x$.
2. *En déduire que pour* $n \geq 1$, $g^{(n)}(x) - x = g \circ \cdots \circ g(x) - x = n(g(x) - x)$ *puis que* $|g(x) - x| \leq \dfrac{2}{n}$.
3. *En déduire* f.

Calculs de limites- Prolongement par continuité - Continuité

Exercice 12 *Etudier, après avoir précisé le domaine de définition, la continuité de*

$$\text{①}\ x \longmapsto x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \qquad \text{②}\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$
$$\text{③}\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 \qquad \text{④}\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor^2 + (2\lfloor x \rfloor + 1)(x - \lfloor x \rfloor)$$

Exercice 13 *Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$.*

1. *Montrer que f est continue à droite en tout point de I. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, quelle est la limite à gauche de f en p ? La fonction f est-elle continue à gauche en tout point de I ?*

2. *Calculer les limites des suites $(f(u_n))_n$ lorsque $^{(a)}$ $u_n = n$, $^{(b)}$ $u_n = n + \frac{1}{2}$, $^{(c)}$ $u_n = n + \dfrac{1}{\ln n}$.*

3. *Soit $a \in [0, 1]$, montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$.*

Exercice 14 *Etudier la définition, la continuité et le prolongement par continuité de f définie par*

$$\text{①}\ x \longmapsto (1+x)\ln(1+x) \qquad \text{②}\ x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$\text{③}\ x \longmapsto \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \qquad \text{④}\ x \longmapsto \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 15

1. *Si $(f, g) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ vérifier que $\sup(f, g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$ et $\inf(f, g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$. En déduire la continuité de $\sup(f, g)$ et de $\inf(f, g)$ si f et g le sont sur I.*

2. *On pose $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0) = -\inf(f, 0)$. Exprimer f^+ et f^- à l'aide de f et de $|f|$. Montrer que ces fonctions sont continues si f l'est. Justifier que $f = f^+ - f^-$.*

Limite et ordre

Exercice 16 *Soit $f(x) = \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor}$, calculer la limite de f en $+\infty$.*

Exercice 17 *Déterminer les limites suivantes*

$$\text{①}\ \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \qquad \text{②}\ \lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} \qquad \text{③}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sin x \qquad \text{④}\ \lim_{x \to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$
$$\text{⑤}\ \lim_{x \to +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad \text{⑥}\ \lim_{x \to -\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad \text{⑦}\ \lim_{x \to 0} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \qquad \textit{si } a \neq 0$$

Exercice 18 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante et telle que $f(x+1) + f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.*

1. *Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f$ existe et préciser sa valeur.*

2. *Donner un équivalent de f en $+\infty$.*

Théorème de la limite monotone

Exercice 19 *Soit f croissante et majorée sur $[1, +\infty[$. On suppose que $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ est croissante sur $]1, +\infty[$, montrer que f est constante.*

Exercice 20 *Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.*

Exercice 21 *Montrer que $\forall t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} dt$, montrer que F admet une limite en $+\infty$. Que dire de $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$?*

Grands théorèmes

Exercice 22 *Soit* $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[)$ *ayant une limite finie en* $+\infty$*, montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 23 *Soit* $f \in \mathcal{C}\left([1,2], \mathbb{R}_+^*\right)$*, montrer qu'il existe deux constantes* k_1 *et* k_2 *telles que* $\forall x \in [1,2]$*,* $k_1 x \leq f(x) \leq k_2 x$*.*

Exercice 24 *Soit* $f : [0,1] \to [0,1]$ *continue, montrer que* $\exists x_0 \in [0,1]$*,* $f(x_0) = x_0$*.*

Exercice 25 *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue, on suppose* f *positive et* $f(0) = f(1) = 0$*. Montrer que* $\forall a \in [0,1]$*,* $\exists x_a \in [0, 1-a]$*,* $f(x_a + a) = f(x_a)$ *(traduire géométriquement ce résultat).*

Exercice 26 *Montrer que l'équation* $x^{17} = x^{11} + 1$ *admet une unique solution.*

Exercice 27 *Montrer que l'équation* $\cos x = x$ *admet une solution positive.*

Exercice 28 *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*, combien de solutions l'équation* $\mathrm{e}^{1+x} = \lambda(1+x)$ *admet-elle ?*

Exercice 29 *Le théorème des cordes universelles :*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue et* n *un entier non nul, on suppose que* $f(0) = f(1)$*. On pose* $\forall k \in \langle 0, .., n-1 \rangle$*,* $\delta_k = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$*.*

1. *Calculer* $\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k$*, que peut-on dire du signe des* δ_k *?*
2. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$*,* $\exists a \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$*,* $f\left(a + \frac{1}{n}\right) = f(a)$*.*
3. *Donner un exemple de fonction où* $\forall x \in \left[0, 1 - \frac{2}{3}\right]$*,* $f\left(x + \frac{2}{3}\right) \neq f(x)$*.*
4. *Application : Un marcheur fait 12 km en 1 heure, montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il fait 6 km (de même, il existe un intervalle d'un quart d'heure pendant lequel il fait 3 km, mais pas nécessairement un intervalle de trois quart d'heure pendant lequel il fait 9 km !).*

★ **Exercice 30** *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et telle que* $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$*. Montrer que* $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$*.*

Exercice 31 *Montrer que* $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x e^x \end{array} \right.$ *est une bijection. On note* g *la bijection réciproque. Montrer qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour* $y \geq \alpha$ *on a* $\ln(y) - \ln(\ln y) \leq g(y) \leq \ln(y)$*. En déduire un équivalent de* $g(y)$ *en* $+\infty$*.*

Exercice 32 *Soient* $(x, y, a) \in \mathbb{R}^3$ *tels que*

$$x^3 + \sin(x) - 2a = 0 \text{ et } 4y^3 + \sin y \cos y + a = 0$$

On désire calculer la valeur de $x + 2y$ *?*

1. *On définit* f *sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^3 + \sin(x)$*, en dérivant* f *plusieurs fois, montrer que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On note* g *la bijection réciproque.*
2. *Exprimer* y *à l'aide de* g *puis conclure.*