# Calculs algébriques



## 1 Sommes et produits.

### 1.1 Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.

**Définition 1.**

Soit $I$ un ensemble non vide. On appelle **famille de nombres complexes indexée par** $I$ une application $a : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ i & \mapsto & a_i \end{array} \right.$. On la note $(a_i)_{i\in I}$. Pour $i \in I$, on dit que $a_i$ est l'**élément d'indice** $i$.

**Exemple.** Notons $I = \{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit\}$, $a_\diamondsuit := 2$, $a_\clubsuit := 3+i$, $a_\heartsuit := \pi$. Alors, $(a_i)_{i\in I} = (a_\diamondsuit, a_\clubsuit, a_\heartsuit)$ est une famille de trois nombres complexes. Les indices $\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit$ sont des *étiquettes* mises sur des nombres.

**Notations 2.**

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble **fini non vide** $I$.

On note $\sum_{i\in I} a_i$ (resp. $\prod_{i\in I} a_i$) la somme (resp. le produit) des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.
Si $I$ est l'ensemble vide, on convient qu'une expression du type $\sum_{i\in I} a_i$ vaut 0 et que $\prod_{i\in I} a_i$ vaut 1.

Dans l'exemple précédent,

$$\sum_{i\in I} a_i = a_\diamondsuit + a_\clubsuit + a_\heartsuit = 2 + (3+i) + \pi \quad \text{et} \quad \prod_{i\in I} a_i = a_\diamondsuit \times a_\clubsuit \times a_\heartsuit = 2 \times (3+i) \times \pi.$$

**Notation.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $I = [\![1, n]\!] = \{1, 2, \ldots, n\}$, on préfère utiliser les notations $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$.

Plus généralement, si $m \leq n$ et $I = [\![m, n]\!] = \{m, m+1, \ldots, n\}$ on note $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i$ et $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i$.

**Remarque.** Nos ensembles $I$ sont supposés finis. Quitte à numéroter les éléments d'un ensemble $I$, on peut toujours le remplacer par un ensemble $I' = [\![1, n]\!]$, où $n$ est le cardinal de $I$. Cependant, on verra dans le paragraphe 1.6 qu'il est utile d'autoriser nos indices à être autre chose que des entiers.

Quelques exemples : détailler les sommes suivantes avec des points de suspension ($n$ est un entier non nul).

- $\sum\limits_{k=2}^{5} k =$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 =$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a $n$ entiers dans $[\![1, n]\!]$. Dans $[\![0, n]\!]$, il y en a $n+1$ (la question se posera souvent, gare à ne pas oublier zéro !) Et si $m \leq n$, combien d'entiers dans $[\![m, n]\!]$ ? On se convaincra qu'il y en a $n - m + 1$. On aura donc

**Proposition 3.**

Soit $a$ un nombre complexe donné et $m$ et $n$ deux entiers naturels (avec $m \leq n$). On a

$$\sum_{k=m}^{n} a = a(n - m + 1).$$

### 1.2 Règles de calcul.

**Proposition 4.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

**Proposition 5.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. Alors,

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i}.$$

Cas particulier : si $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

**Proposition 6** (Relations de Chasles)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m$ un entier tel que $1 \leq m \leq n$. Soit $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de nombres complexes. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^{n} a_i\right).$$

**Remarque.** Spécifions $m = n$ dans les identités ci-dessus. On se retrouve à écrire la somme $\sum\limits_{i=n+1}^{n} a_i$, pour laquelle l'ensemble des indices est vide : aucun entier n'est supérieur à $n+1$ et inférieur à $n$. Nous avons convenu qu'une telle somme vaut 0 donc l'identité est bien vraie. De même, ayant convenu qu'un "produit vide" valait 1, la seconde identité est bien vraie pour $m = n$.

Attention ! L'égalité entre

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \times b_i$$

est grossièrement FAUSSE en général (on renvoie à la proposition 12 pour un calcul).

### 1.3 Exemples importants : progressions arithmétiques et géométriques.

**Proposition 7.**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q$ un nombre complexe. On a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

**Exercice.** Démontrer que la formule suivante (à connaître) est vraie pour tout $n$ entier naturel.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

### 1.4 Changement d'indice, exemples.

Pas de définition formelle ici : il s'agit d'écrire une même somme de deux manières différentes, en changeant la forme de l'indice, et parfois l'"ordre d'écriture" des termes. Dans ce qui suit, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes.

<u>Exemple 1</u> $[j=k+1]$ : $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{j=0}^{n-1} u_{j+1}$.

<u>Exemple 2</u> $[j=n-k]$ : $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1+u_2+\ldots u_n = u_n+\ldots+u_2+u_1 = \sum\limits_{j=0}^{n-1} u_{n-j}$.

<u>Exemple 3</u> : Tri des termes d'indice pair et d'indice impair :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k\ :\ 2k\leq n} u_{2k} + \sum_{2k+1\ :\ 2k+1\leq n} u_{2k+1}\\
&= \sum_{k\ :\ k\leq \frac{n}{2}} u_{2k} + \sum_{k\ :\ k\leq\frac{n-1}{2}} u_{2k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} u_{2k} \ + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} u_{2k+1}.
\end{aligned}$$

### 1.5 Télescopage.

**Proposition 8** (Sommes télescopiques)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On a

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0.$$

**Preuve.** • Première démonstration, avec des points de suspension : c'est la meilleure manière de voir les termes se « télescoper ».

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+1}) = (u_0-\cancel{u_1})+(\cancel{u_1}-\cancel{u_2})+(\cancel{u_2}-\cancel{u_3})\ldots(\cancel{u_{n-1}}-\cancel{u_n})-(\cancel{u_n}+u_{n+1}) = u_0-u_{n+1},$$

(on multipliera pas $-1$ pour retrouver la formule de l'énoncé, le télescopage se voyait mieux ainsi).
• Une seconde preuve à l'aide d'un changement d'indice.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = \left(\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right) &= \left(\sum_{k=1}^{n+1}u_k\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)\\
&= \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n}u_k}+u_{n+1}\right)-\left(u_0+\cancel{\sum_{k=1}^{n}u_k}\right)\\
&= u_{n+1}-u_0.
\end{aligned}$$

□

**Proposition 9** (Produits télescopiques)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls. On a

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0}.$$

Calculons

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^6 - k^6\right) =$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) =$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) =$

On peut utiliser le télescopage pour retrouve la somme d'une progression géométrique (dans le cas non trivial $q \neq 1$) :

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}.$$

Reste à diviser par $1-q$ pour retrouver la formule.

**Proposition 10.**

Soient $a$ et $b$ deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k. \end{aligned}$$

Factoriser :

- $a^2 - b^2 =$
- $a^3 - b^3 =$
- $a^4 - b^4 =$

### 1.6 Sommes doubles, sommes triangulaires.

**Notation.**

Pour $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$, on note $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ l'ensemble $\{(i,j), i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,p]\!]\}$.
Lorsqu'on indexe une famille de nombres complexes par $I$, on s'autorise la notation $a_{i,j}$ à la place de $a_{(i,j)}$.

**Proposition 11** (Sommes doubles)**.**

Soient $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$, et $I = [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par $I$. On a

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

On prouve cette proposition en représentant l'ensemble d'indices comme un tableau (indice $i$ en ligne, $j$ en colonne). La première égalité est obtenue en regroupant d'abord les éléments d'une même ligne. La seconde en regroupant d'abord les éléments d'une même colonne.

**Proposition 12** (Produit de deux sommes)**.**

Soient $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$ et deux familles de nombres complexes $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$. On a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_i \cdot b_j.$$

La preuve de la proposition 1.6 peut être adaptée pour obtenir le résultat suivant. On somme ici sur des couples $(i,j)$ où $i$ et $j$ doivent être rangés dans un certain ordre.

**Proposition 13** (Sommes triangulaires)**.**

Soient $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$, et $I = \{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] : i \leq j\}$. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par $I$. On a

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{p} a_{i,j}.$$

**Remarque.** On saura adapter à d'autres ensembles d'indices, par exemple

$$\sum_{0\leq i<j\leq n} a_{i_j} = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

**Méthode.**

Dans les doubles sommes écrites dans les propositions 11 et 13, on peut ajouter des parenthèses superflues :

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \left( \sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right).$$

Lorsque, ci-dessus, on calcule à l'intérieur des parenthèses, il faut le faire à $j$ fixé, c'est à dire que *l'on traite $j$ comme une constante.*

**Exemple.** Calcul de $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j+1}$.

## 2 Coefficients binomiaux et formule du binôme.

### 2.1 Factorielles.

**Définition 14.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **factorielle** $n$ et on note $n!$ le nombre

$$n! := \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n-1)\cdot n & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

**Exemple.** $2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120.$

**Proposition 15.**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)! = (n+1)\cdot n!.$$

**Remarque.** Le nombre $n!$ a une signification combinatoire : c'est l'ensemble des *permutations*, ou des bijections sur un ensemble à $n$ éléments (à suivre...) C'est donc notamment le nombre de façons d'« ordonner » $n$ objets. Exemple dans le cas $n = 3$.

### 2.2 Coefficients binomiaux.

**Définition 16.**

Soient deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Le **coefficient binomial** « $p$ parmi $n$ », noté $\binom{n}{p}$ est défini par

$$\binom{n}{p} := \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0, n]\!], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque.** Le nombre $\binom{n}{p}$ a une signification combinatoire : c'est le nombre de façons de choisir $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments. Plus précisément, étant donné un ensemble $E$ ayant $n$ éléments, $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties $F$ de $E$ ayant $p$ éléments.

**Exemple.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $\displaystyle\binom{n}{0} = 1$ et $\displaystyle\binom{n}{1} = n$, ce qui est cohérent avec la signification combinatoire.

**Exemples.** On peut écrire
$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)\cancel{(n-p)!}}{p!\cancel{(n-p)!}},$$
ce qui permet de calculer ces nombres « à la main » lorsque $p$ n'est pas trop grand.
Par exemple, on calcule les nombres $\displaystyle\binom{6}{2}$, $\displaystyle\binom{21}{2}$, $\displaystyle\binom{9}{3}$, $\displaystyle\binom{16}{4}$.

Les formules qui suivent seront toutes établies par le calcul. Signalons néanmoins qu'à chaque fois, une preuve combinatoire est possible. Nous adopterons ce point de vue plus tard dans l'année.

**Proposition 17.**

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

**Proposition 18.**

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.
$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

**Proposition 19** (Formule de Pascal)**.**

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.
$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Conséquence. Triangle de Pascal/algorithme de calcul.

**Corollaire 20.**

Un coefficient binomial est un entier.

**Remarque.** Cette proposition est une évidence lorsqu'on pense à la signification combinatoire du coefficient mais ce n'est pas clair d'après la définition 14, où $\binom{n}{p}$ est défini comme un quotient d'entiers.

### 2.3 Binôme de Newton.

On connaît l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. On va généraliser pour un exposant quelconque.

**Proposition 21** (Formule du binôme)**.**

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

**Remarque.** On peut choisir lequel des deux termes apparaît à la puissance $k$. Par exemple, il sera plus pratique d'écrire

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \quad \text{plutôt que} \quad (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.$$

**Des calculs classiques** :

· $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$

· $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k =$

· $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} =$