Primitives (calcul direct ou reconnaître $f' \times g' \circ f$)

Exercice 1 *Calculer une primitive de $f(x)$ lorsque $f(x) =$*

① x^3+x^2+5 ② $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$ ③ $\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}$ ④ $\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
⑤ $e^{2x}+e^{-3x}$ ⑥ e^{3x-2} ⑦ $e^{-x}\sin(2x)$ ⑧ $e^{2x}(4+\cos(x))$

Exercice 2 *Calculer une primitive de $f(x)$ lorsque $f(x) =$*

① $\dfrac{1}{3x+5}$ ② $\dfrac{1}{x^2+2x+1}$ ③ $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ ④ $\dfrac{1}{x^2-1}$
⑤ $\dfrac{2}{4x^2+9}$ ⑥ $\dfrac{1}{x^2-x+1}$ ⑦ $\dfrac{1}{x^2+2x+3}$ ⑧ $\dfrac{1}{x^2+6x+10}$

Exercice 3 *Calculer une primitive de $f(x)$ lorsque $f(x) =$*

① xe^{-x^2} ② $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ③ $\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$ ④ $\dfrac{\sin x}{1+2\cos x}$
⑤ $\dfrac{e^x}{2+e^x}$ ⑥ $\dfrac{1}{x\ln x}$ ⑦ $\dfrac{1-\ln x}{x}$ ⑧ $\dfrac{x}{1+x^4}$

Exercice 4 *Calculer* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$ *(trouver a et b réels tels que* $\dfrac{x^4+2x^2-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$*).*

Exercice 5 *Calculer* $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}dx$ *(trouver a, b, c réels tels que* $\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$*).*

Théorème fondamental du calcul intégral

Exercice 6 *Préciser le domaine de définition, de dérivabilité et la dérivée des fonctions définies par*

① $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ ② $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ ③ $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ ④ $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$
⑤ $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$ ⑥ $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ ⑦ $\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^4}dt$ ⑧ $\displaystyle\int_0^{e^x} \frac{\arccos t}{1+t^2}dt$

Exercice 7 *Soit* $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{1+t}dt$. *Préiciser le domaine de définition de F, le domaine de dérivabilité et l'expression de $F'(x)$.*

Exercice 8 *Soit* $F(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan t}{t}dt$, *quel est le domaine de définition de F ? Calculer $F'(x)$ et en déduire F.*

★ **Exercice 9** *Etudier la fonction f définie par* $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \arccos\left(\sqrt{t}\right)dt + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\left(\sqrt{t}\right)dt$.

Exercice 10 *Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on définit $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par* $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\, dt$.

1. *Montrer que F est $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et calculer $F''(x)$.*
2. *En déduire que pour $x \in [0,1]$,* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_u^1 f(t)\, dt\right) du$.

Intégration par parties

Exercice 11 *Calculer* ① $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$, ② $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\, dx$ *et* ③ $\displaystyle\int_0^1 2x\ln(1+x)\, dx$.

Exercice 12 *Calculer les primitives de* ① $f(x) = (x+1)e^{-x}$, ② $f(x) = \left(x^2+1\right)e^x$, ③ $f(x) = x\cos(x)e^{-x}$

Exercice 13 *Soit* $u_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n x dx$ *établir une relation de récurrence vérifiée par la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 14 *Soit* $u_n = \displaystyle\int_0^\pi x^n \cos x dx$ *établir une relation de récurrence vérifiée par la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

★ **Exercice 15** *On définit, pour tout entier naturel* n*, l'intégrale* I_n *par* $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$*. Montrer que pour* $n \geq 1$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$*. Calculer* I_0*, en déduire que* $I_n = \dfrac{2^{2n+3}\,(n+2)!\;n!}{(2n+4)!}$.

Exercice 16 *Montrer que* $\forall k \geq 1$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\; dt = \frac{1}{k^2}$.

Exercice 17 *On définit*

$$I = \int_0^\pi \cos^4 x dx \text{ et } J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$$

1. *Justifier que* I *peut s'écrire*
$$I = \int_0^\pi \cos x \left(\cos x - \cos x \sin^2 x\right) dx$$
2. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer la relation*
$$I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$$
Montrer de même que
$$J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$$
3. *Donner les valeurs de* $I+J$ *et de* $J-I$*. En déduire celles de* I *et de* J.

Exercice 18 *Soit* $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$*, donner une relation de récurrence pour la suite* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En déduire que $(n+1)\,I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ *pour* $n \geq 0$.

Exercice 19 *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\ln^2\left(1+t^2\right)}{1+t^2}dt$*. En déduire* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln^2(\cos u)\tan u\; du$.

Exercice 20 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \{0,\cdots,n\}$*, on définit* $I_{n,k} = \displaystyle\binom{n}{k}\int_{-1}^1 (1+x)^{n-k}(1-x)^k\, dx$ *où*

1. *Calculer, à* n *fixé,* $\displaystyle\sum_{k=0}^n I_{n,k}$.
2. *A l'aide d'un intégration par parties, montrer que pour* $n \geq 1$ *et* $k > 0$, $I_{n,k} = I_{n,k-1}$.
3. *En déduire* $I_{n,k}$.

Exercice 21 *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *on définit* $B(p,q) = \displaystyle\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q dx$

1. *Montrer que si* $q > 0$, $B(p,q) = \dfrac{q}{p+1}B(p+1,q-1)$*. En déduire* $B(p,q)$.
2. *Avec* $a=-1, b=1, p=q=n$ *quelle égalité sur les coefficients du binôme obtient-on ?*

Le changement de variables

Exercice 22 *Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.*

① $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x dx}{2+e^x}$, $t=e^x$ ② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2t}{1+\cos t}dt$, $u=\cos t$ ③ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx$, $x=\tan u$

④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^3(x)dx$, $t=\sin x$ ⑤ $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$, $t=\cos x$ ⑥ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx$, $t=\cos x$

⑦ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)\sqrt{2\sin 2x}}$, $u=\tan x$ ⑧ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$, $u=\cos x$ ⑨ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{dx}{\cos(x)(\sin x-\cos x)}$, $t=\tan x$

Exercice 23 *Calculer* $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ *en posant* $x=\cos\varphi$.

Exercice 24 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)(1+\cos x+\sin x)}dx$ *en posant* $t=\tan\dfrac{x}{2}$.

Exercice 25 *Soient* $a>0$ *et* $b>0$, *calculer* $I=\displaystyle\int_a^b \frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{\frac{b}{x}}}{x}dx$ *en posant* $ux=ab$.

Exercice 26 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$ *en posant* $u=\frac{\pi}{4}-x$. *En déduire* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$.

Exercice 27 *Calculer* $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{8}} \frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x}dx$ *en posant* $u=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$, *quel est le signe du résultat obtenu ?*

Exercice 28 *Pour* $x>0$, *on définit* $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$, *justifier que* f *est dérivable, déterminer* f' *puis* f. *Retrouver le résultat avec le changement de variable* $u=\dfrac{1}{t}$.

Exercice 29 *Soit* $a>0$, *on pose* $I(a)=\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$, *en posant* $x=a\cos t$, *et en posant* $x=a\sin t$ *calculer* $I(a)$.

Exercice 30 *Soit* $a>0$, *calculer* $\displaystyle\int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ *à l'aide d'un changement de variable qui laisse globalement les bornes inchangées (globalement !).*

Exercice 31 *Soit* $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ *et* F *définie par* $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$, *à l'aide du changement de variable* $u=\dfrac{1}{t}$, *établir, pour* $x\neq 0$, *une relation entre* $F(x)$ *et* $F\left(\dfrac{1}{2x}\right)$.

Divers calculs d'intégrales et de primitives

Exercice 32 *Calculer les intégrales suivantes :*

① $\displaystyle\int_{-3}^{0} \left|x^2-x-2\right| dx$ ② $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$ ③ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2(x)dx$ ④ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4(x)}{\cos^2(x)}dx$

Exercice 33 *Calculer* $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ *et* $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ *(un changement de variable affine montre que* $I=J$, *lequel ?).*

Exercice 34 *A l'aide d'IPP calculer les intégrales suivantes*

① $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan(x)dx$ ② $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$ ③ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

④ $\int_1^2 2t^3 e^{t^2+1}dt$ ⑤ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ⑥ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(1-\cos(x))\,dx$

Exercice 35 *Calculer* $\operatorname{sh}(\ln a)$, *en déduire* $\operatorname{sh}(\ln 2)$, $\operatorname{sh}(\ln 3)$. *Calculer la dérivée de* $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$.
Enfin calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ *et* $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ *en posant* $x = \operatorname{sh} t$.

Exercice 36 *Déterminer des primitives de* $f(x) = \sin^3 x$, $g(x) = \sin(2x)\cos x$ *et de* $h(x) = \cos^2 x \sin^4(x)$.

Exercice 37 *On définit* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\right)^2 dx$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right)^2 dx$.

1. *Calculer* J.
2. *Montrer que* $\left(\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right)^2 = 2 \times \dfrac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x}$.
3. *A l'aide du changement de variable* $u = \dfrac{\pi}{4} - x$, *montrer que* $J = 4I$ *et en déduire* I.

Exercice 38 *En vrac, calculer*

① $\displaystyle\int_{\ln(5)}^{\ln(13)} \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx$, $t = \frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}$

② $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}dx$, $t = 1-\sqrt{x}$

③ $\displaystyle\int \arctan\sqrt[3]{x}dx$, $t = \sqrt[3]{x}$

④ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x \cos 2x}dx$, $u = \sin x$

⑤ $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{3+\operatorname{sh}^2 x}dx$, $u = \operatorname{ch} x$

⑥ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$, $t = \sqrt[?]{x}$