Relations de comparaisons et d'équivalence.

Exercice 1 *Pour chaque cas, déterminer quelle fonction croît le plus vite (i.e préciser parmi les deux fonctions laquelle est négligeable au point indiqué)*

① $\dfrac{\ln x}{x}$ *et* $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *en* $+\infty$ ② $(\ln x)^4$ *et* $\sqrt{x}\ln(\ln x)$ *en* $+\infty$

③ $e^{\sqrt{x}}$ *et* x^e *en* $+\infty$ ④ $e^{\sqrt{\ln x}}$ *et* x^2 *en* $+\infty$

⑤ $x^{\ln x}$ *et* x^x *en* $+\infty$ *et* 0^+ ⑥ $x^{\ln x}$ *et* $\ln x^x$ *en* $+\infty$

Exercice 2 *Comparer au voisinage de* 0 *les fonctions* $x\ln(x)$, $\ln(1+2x)$ *et* $\ln\left(1+x^2\right)$.

Exercice 3 *Passage à l'exponentielle et au logarithme*
Soient f *et* g *deux fonctions définies sur* I, $a\in\overline{\mathbb{R}}$ *un point de* $\overline{I}\cup\{\pm\infty\}$. *Monter que*

1. $\exp(f)\underset{a}{\sim}\exp(g)\Longleftrightarrow f-g\xrightarrow[x\to a]{}0$
2. *Si* $f\underset{a}{\sim}g$ *et si* $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}L$ *ou* $+\infty$ *avec* $L\neq 1$ *alors* $\ln f(x)\underset{x\to a}{\sim}\ln g(x)$ *(on suppose que* $\ln f$ *et* $\ln g$ *sont définies au voisinage de* a*).*
3. *Si* $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}1$ *alors* $\ln(f(x))\underset{a\to 0}{\sim}f(x)-1$
4. *Applications simples : donner un équivalent de*

① $e^{x+\frac{1}{x}}$ *en* $+\infty$ ② $e^{\sqrt{x+1}}$ *en* $+\infty$ ③ $\ln\left(x^2+1\right)$ *en* $+\infty$

④ $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)$ *en* 2 ⑤ $\ln(\cos x)$ *en* 0 ⑥ $\ln(\ln x)$ *en* 1

Application des équivalents usuels

Exercice 4 *Donner un équivalent des fonctions suivantes :*

① $\dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan(x)}$ *en* 0 ② $\dfrac{\sin(x)(e^x-1)}{\cos(x)-1}$ *en* 0 ③ $\dfrac{\mathrm{sh}(x)(\mathrm{ch}(x)-1)}{\sin(x)(\cos(x)-1)}$ *en* 0

④ $\dfrac{5^x-1}{\sin(x)}$ *en* 0 ⑤ $\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ *en* 0 ⑥ $\dfrac{\arctan(x)}{\sqrt{1+x}-1}$ *en* 0 *et* $+\infty$

⑦ $\dfrac{x^3+x^2+1}{\sqrt{x}+x^2}$ *en* 0^+ *et en* $+\infty$ ⑧ $\dfrac{1+x^\alpha}{\ln(1+x^\beta)}$ *où* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ *en* 0 *et* $+\infty$ ⑨ $\dfrac{\sqrt{e^x+x^5}}{\ln^3(x)+\sqrt{x}}$ *en* 0 *et en* $+\infty$

Exercice 5 *Donner un équivalent des fonctions suivantes :*

① $\dfrac{1}{\cos(x)}-\tan(x)$ *en* $\dfrac{\pi}{2}$ ② $\tan(x)-1$ *en* $x=\frac{\pi}{4}$ ③ $e^{\sin(x)}-e$ *en* $\dfrac{\pi}{2}$

④ $\dfrac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos^2(x)}$ *en* $\dfrac{\pi}{2}$ ⑤ $\left(x^2+ax+3\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ *en* 1 ⑥ $\sqrt[5]{\dfrac{1+\cos(x)}{\ln\left(\dfrac{x}{\pi}\right)}}$ *en* π

★ **Exercice 6** *Donner un équivalent des fonctions suivantes :*

① $(x+1)^{\frac{1}{x+1}}-x^{\frac{1}{x}}$ *en* $+\infty$ ② $e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}$ *en* $+\infty$

Calculs de limites par les équivalents

Exercice 7 *Déterminer les limites suivantes :*

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\ln(1+x^2)}{x^2\tan(x)}$ ② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^3}\right)$ ③ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$

④ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{2^x-1}$ ⑤ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$ ⑥ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\mathrm{ch}(x)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$

⑦ $\displaystyle\lim_{x\to e}(\ln(x))^{\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right)}$ ⑧ $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ ⑨ $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x^2+x-2)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

★ **Exercice 8** *Déterminer les limites suivantes :*

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$ ② $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ ③ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(2x)}{2\sin(x)-\sqrt{2}}$ ④ $\displaystyle\lim_{x\to\pi}(2+\cos(x))^{\frac{1}{\tan^2 x}}$

Etude aux bords

Exercice 9 *Etudier les limites aux bords du domaine de définition de f, lorsque*

① $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x}}$ ② $f(x)=\sin(x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$ ③ $f(x)=(1+\ln(x))^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Exercice 10 *Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f_a(x)=\left(x^2-ax+1\right)\tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$*

1. *Donner un équivalent de f_a en $x=3$.*
2. *Pour quelle valeur de a la fonction est-elle prolongeable par continuité en $x=3$ (i.e. admet-elle une limite finie en $x=3$). Quelle est alors la valeur que l'on doit choisir pour $f_a(3)$ afin d'obtenir une fonction continue en $x=3$?*

★ 3. *Plus généralement, si $P\in\mathbb{R}[X]$ est un polynôme à coefficients réels, à quelle condition sur P la fonction $f(x)=P(x)\tan\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)$ est-elle prolongeable en $x=3$? Exprimer alors $f(3)$ en fonction de $P'(3)$.*

Développements limités - calculs

Exercice 11 *Somme et produit : Calculer les développements limités à l'ordre indiqué de, au voisinage de* 0, *de*

① $\cos(x)-\ln(1+x)$ *ordre 3* ② $e^x-\cos(x)$ *ordre 3* ③ $\dfrac{\sqrt{1+2x}-\cos(x)}{x}$ *ordre 2*

④ $\cos(x)\,\mathrm{ch}(x)$ *ordre 3* ⑤ $e^x\ln(1+x)$ *ordre 3* ⑥ $\dfrac{\sin(x)\sqrt{1+x}-xe^x}{x}$ *ordre 2*

⑦ $\dfrac{\ln(1+x)}{1+2x}$ *ordre 3* ⑧ $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ *ordre 3* ⑨ $\sin(x)+\sqrt{1+x}$ *ordre* 3

Exercice 12 *Utilisation des fonctions usuelles : Donner le développement limité en* 0 *à l'ordre 2 de :*

① e^{1+x} ② $\dfrac{\sin(x)}{2-x}$ ③ $\sin(\frac{\pi}{6}+x)$

④ $\ln(2+x)$ ⑤ $\sqrt{3-2x}$ ⑥ $\dfrac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2-x}}$

Exercice 13 *En un point différent de* 0, *calcul élémentaires : Donner le développement limité des fonctions suivantes :*

① $\ln(2x)$ *en* $x=\frac{1}{2}$ *, ordre 3* ② $\sin(\pi x)$ *en* $x=\frac{1}{6}$ *, ordre 2* ③ $\dfrac{1-x}{3+2x}$ *en* $x=-1$ *, ordre 2*

④ $\sqrt{x}$ *en* $x=1$, *ordre 3* ⑤ $\ln(\tan x)$ *en* $x=\frac{\pi}{4}$, *ordre* 3 ⑥ $\sqrt{\tan x}$ *en* $x=\frac{\pi}{4}$, *ordre* 3

⑦ $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ *en* $x=1$, *ordre 4* ⑧ $e^{\cos(2x)}$ *en* $x=\frac{\pi}{6}$, *ordre 3* ⑨ $1-x-\dfrac{2x\ln(x)}{1+x}$ *en* $x=1$, *ordre 3*

Exercice 14 *Un peu de composition et de quotient : Donner les développements limités en* 0 *des fonctions f définies par*

① $\sqrt{\cos(x)}$ *, ordre 4* ② $\exp\left(\sqrt{\cos(x)}\right)$ *, ordre 2* ③ $\cos(\sin x)$ *, ordre 4*

④ $\dfrac{1}{\cos(x)}$, *ordre 4* ⑤ $\dfrac{\cos x}{1+\ln(1+x)}$, *ordre2* ⑥ $\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$, *ordre* 2

Exercice 15 *Primitivation : Donner un développement limité à l'ordre* 4 *en* 0 *de*

① $f(x)=\arccos(x)$ ② $f(x)=\arctan(\mathrm{sh}\,x)$ ③ $f(x)=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}\right)$

Utilisation des développements limités

Exercice 16 *Calculer les limites suivantes :*

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{e^x - \cos(x)}$ ② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - \mathrm{sh}(x)}{x(\cos(x) - \mathrm{ch}(x))}$ ③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x+2)}{\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}$

④ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$ ⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$ ⑥ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{\tan x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}$

Exercice 17 *Déterminer a et b pour que f admette, au voisinage de 0, une partie principale d'ordre le plus grand possible lorsque :*

① $f(x) = \sin(x) + a\,\mathrm{sh}(x) + b\tan(x)$ ② $f(x) = \cos(x) - \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$

Exercice 18 *On considère les fonctions suivantes, montrer que l'on peut prolonger par dérivabilité en 0 et placer la courbe par rapport à sa tangente :*

① $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$ ② $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x} - e^x}{xe^x}$ ③ $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1}$

Exercice 19 *Etudier les asymptotes éventuelles de f définie par $f(x)$, où*

① $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ ② $f(x) = x(3x+2)\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ③ $f(x) = (x-2)\exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

④ $f(x) = \cos(\arctan x)$ ⑤ $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1} - x\sqrt{x^2+1}$ ⑥ $f(x) = \dfrac{1}{x(e^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 20 *Etudier les branches infinies (limites, asymptotes) de*

① $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ② $f(x) = \sqrt{x^2 - x}\,e^{\frac{1}{x+1}}$

Exercice 21 *Etudier complètement la fonction f définie par $f(x) = x^{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$. Pour les branches infinies, une étude "à la main" suffit.*

Exercice 22 *Etudier les fonctions suivantes*

① $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ ② $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ ③ $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$

④ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ ⑤ $f(x) = x^2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ ⑥ $f(x) = \dfrac{xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

⑦ $f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$ ⑧ $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ ⑨ $f(x) = x\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

Exercice 23 *On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ pour x non nul, peut-on prolonger f en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 24 *Déterminer a et b pour que $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{a}{\ln(1+x)} + \dfrac{b}{e^x - 1}$ tende vers 0 quand x tend vers 0. Donner alors un équivalent de f en 0.*