Chapitre 11

Limite d'une fonction

Sommaire

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

I LIMITES

1) Définition

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, soit a un élément de I ou bien une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$), et soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$, intuitivement on dira que b est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a lorsque $f(x)$ peut être aussi voisin que l'on veut de b pourvu que x soit suffisamment voisin de a, d'où la définition :

Définition 11.1

On dit que f admet pour limite b en a lorsque : $\forall$ W, voisinage de b, $\exists$ V, voisinage de a, tel que $\forall\, x \in \mathrm{I}, x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{V} \implies f(x) \in \mathrm{W}$. Si c'est le cas, on notera :

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{a} f = b, \text{ ou encore } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b.$$

À retenir : $\lim\limits_{a} f = b$ **signifie**

- Si $a, b \in \mathbb{R}$: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in \mathrm{I}, |x-a| < \alpha \implies |f(x) - b| < \varepsilon$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$: $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in \mathrm{I}, |x-a| < \alpha \implies f(x) > \mathrm{A}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = -\infty$: $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in \mathrm{I}, |x-a| < \alpha \implies f(x) < \mathrm{A}$.
- Si $a = +\infty$ et $b \in \mathbb{R}$: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{I}, x > \mathrm{A} \implies |f(x) - b| < \varepsilon$.
- Si $a = +\infty$ et $b = +\infty$: $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{I}, x > \mathrm{B} \implies f(x) > \mathrm{A}$.
- Si $a = +\infty$ et $b = -\infty$: $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{I}, x > \mathrm{B} \implies f(x) < \mathrm{A}$.
- Si $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{I}, x < \mathrm{B} \implies |f(x) - b| < \varepsilon$.

- Si $a = -\infty$ et $b = +\infty$: $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{I}, x < \mathrm{B} \implies f(x) > \mathrm{A}$.
- Si $a = -\infty$ et $b = -\infty$: $\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R}, \exists\, \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathrm{I}, x < \mathrm{B} \implies f(x) < \mathrm{A}$.

☞**Exemples** :

- Soit $f(x) = x^2$, montrons que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$: soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$, posons $\mathrm{B} = \sqrt{|\mathrm{A}|}$, si $x > \mathrm{B}$ alors $x^2 > \mathrm{B}^2 = |\mathrm{A}| \geqslant \mathrm{A}$ donc $f(x) > \mathrm{A}$.
- Soit $f(x) = x^2$ et soit $a \in \mathbb{R}$, montrons que $\lim\limits_{a} f = a^2$: soit $\varepsilon > 0$, $|x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$, si $|x - a| < \alpha$, alors $|x^2 - a^2| < \alpha(\alpha + 2|a|)$, si on prend $\alpha = \min(1; \frac{\varepsilon}{1+2|a|})$, alors $\alpha(\alpha + 2|a|) \leqslant \alpha(1 + 2|a|) \leqslant \varepsilon$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, |x - a| < \alpha \implies |x^2 - a^2| < \varepsilon$.

Remarque 11.1 –

a) *Si* $\lim\limits_{a} f = b$ *alors* $\lim\limits_{a} |f| = |b|$, *mais la réciproque est fausse sauf pour* $b = 0$.

b) *Lorsque* $b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a} f = b \iff \lim\limits_{a} |f(x) - b| = 0 \iff \lim\limits_{a} f(x) - b = 0$.

La définition de la limite d'une suite, que nous avons vue dans un chapitre précédent, peut s'énoncer ainsi en terme de voisinage :

Définition 11.2 **(Retour sur les suites)**

On dit que la suite (u_n) *admet pour limite* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *lorsque :*

$$\forall\, \mathrm{W}, \text{ voisinage de } \ell, \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant \mathrm{N} \implies u_n \in \mathrm{W}.$$

2) Premières propriétés

Théorème 11.1

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* a *un élément ou une extrémité de* I.

- *Si f admet une limite en a, alors celle - ci est unique.*
- *Si f admet une limite* ***finie*** *en a, alors f est* ***bornée au voisinage*** *de a (réciproque fausse).*
- *Si* $\lim\limits_{a} f = b$ *et si* $\alpha < b$ *(respectivement* $b < \alpha$*), alors au voisinage de a f est strictement supérieure à* α *(respectivement* $f(x) > \alpha$*).*
- *Si* $\lim\limits_{a} f = b$ *avec* $a \in \mathrm{I}$, *alors nécessairement* $b = f(a)$.

Preuve : Pour les trois premiers points, la preuve est tout à fait analogue à celle faite pour les suites.

Pour le quatrième point : tout voisinage de b doit contenir $f(a)$, on en déduit par l'absurde que $b = f(a)$. □

Théorème 11.2 **(caractérisation séquentielle de la limite)**

$\lim\limits_{a} f = b \iff$ *pour toute suite* (u_n) *d'éléments de* I *qui tend vers a (dans* $\overline{\mathbb{R}}$*), la suite* $(f(u_n))$ *tend vers b (dans* $\overline{\mathbb{R}}$*).*

Preuve : Supposons que $\lim\limits_{a} f = b$ et soit (u_n) une suite d'éléments de I telle que $u_n \to a$. Soit W un voisinage de b, il existe V un voisinage de a tel que $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{V} \implies f(x) \in \mathrm{W}$. Comme $u_n \to a$, il existe un entier $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \mathrm{N} \implies u_n \in \mathrm{V}$, or les termes u_n sont dans I donc si $n \geqslant \mathrm{N}$ alors $u_n \in \mathrm{I} \cap \mathrm{V}$ et donc $f(u_n) \in \mathrm{W}$, ce qui prouve que $f(u_n) \to b$.

Supposons maintenant que pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui tend vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers b. Si la fonction f n'a pas pour limite b en a, alors il existe un voisinage W de b tel que pour tout voisinage V de a, il existe $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{V}$ tel que $f(x) \notin \mathrm{W}$. En prenant pour $n \in \mathbb{N}^*$ des voisinages de la forme $\mathrm{V}_n =]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}[$ si $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V}_n =]n; +\infty[$ si $a = +\infty$, ou $\mathrm{V}_n =]-\infty; -n[$ si $a = -\infty$, on construit une suite (u_n) d'éléments de I telle que $u_n \in \mathrm{V}_n$ et $f(u_n) \notin \mathrm{W}$, il est facile de voir que la suite (u_n) tend vers a, donc la suite $(f(u_n))$ tend vers b, à partir d'un certain rang on doit donc avoir $f(u_n) \in \mathrm{W}$ ce qui est contradictoire, donc $\lim\limits_{a} f = b$. □

Applications :

- Ce théorème peut être utilisé pour montrer qu'une fonction f n'a pas de limite en a.
  Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$ car la suite u définie par $u_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ tend vers $+\infty$ mais la suite $(f(u_n) = (-1)^n)$ n'a pas de limite.
- Ce théorème peut être également utilisé pour prouver les propriétés de la limite d'une fonction en se ramenant à celles des suites.

Voici un autre lien avec les suites (que l'on utilisait déjà de manière assez naturelle) :

Théorème 11.3

Soit $f :]A;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{+\infty} f = b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite (u_n) définie (à partir d'un certain rang) par $u_n = f(n)$ a pour limite b.

Preuve : Soit W un voisinage de b, il existe un réel B tel que $\forall\, x \in \mathrm{I}, x > \mathrm{B} \implies f(x) \in \mathrm{W}$, par conséquent si $n \geqslant \mathrm{N} = 1 + \lfloor \mathrm{B} \rfloor$, alors $u_n \in \mathrm{W}$, donc $u_n \to b$. □

3) Limite à gauche, limite à droite

Définition 11.3

*Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, soit a un élément de I ou une extrémité **réelle** de I, et soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$.*

- *Si $\mathrm{I} \cap]-\infty; a[\neq \emptyset$: on dit que b est la limite à gauche en a de f lorsque :*
  $$\forall\, \mathrm{W}, \text{voisinage de } b, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in \mathrm{I}, x \in]a-\alpha; a[\implies f(x) \in \mathrm{W} \quad .$$
  Notations : $\lim\limits_{a^-} f = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = b$.
- *Si $\mathrm{I} \cap]a; +\infty[\neq \emptyset$: on dit que b est la limite à droite en a de f lorsque :*
  $$\forall\, \mathrm{W}, \text{ voisinage de } b, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in \mathrm{I}, x \in]a; a+\alpha[\implies f(x) \in \mathrm{W}.$$
  Notations : $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = b$.

☞**Exemple** : Soit $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et soit $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lim\limits_{a^+} f = a$ et $\lim\limits_{a^-} f = a - 1$.

Théorème 11.4

On a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b \iff \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = b$. Et lorsque $a \in \mathrm{I}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \left(f(a) = b \text{ et } \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b \right).$$

Preuve : Celle - ci est simple et laissée en exercice. □

☞**Exemple** : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Il est facile de voir que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1$, mais la fonction f n'a pas de limite en 0 car $f(0) \neq 1$.

II PROPRIÉTÉS DES LIMITES

1) Limites et opérations

Soient $f, g \in \mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et soit a un élément de I ou une extrémité de I. Si $\lim\limits_{a} f = \ell$ et $\lim\limits_{a} g = \ell'$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors :

Théorème 11.5

- $\lim\limits_{a} f + g = \ell + \ell'$ *sauf si $\ell = +\infty$ et $\ell' = -\infty$ (ou l'inverse) : **forme indéterminée**.*
- $\lim\limits_{a} f \times g = \ell\ell'$ *sauf si $\ell = 0$ et $\ell' = \pm\infty$ (ou l'inverse) : **forme indéterminée**.*
- *Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{a} \lambda f = \lambda\ell$.*

Preuve : Pour le premier point : soit (u_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a, alors $f(u_n) \to \ell$ et $g(u_n) \to \ell'$ donc (propriétés des suites) $f(u_n) + g(u_n) \to \ell + \ell'$ car nous ne sommes pas dans le cas d'une forme indéterminée, par conséquent la fonction $f + g$ a pour limite $\ell + \ell'$ en a. Le raisonnement est le même pour tous les autres points jusqu'au dernier. □

Théorème 11.6
Si f ne s'annule pas au voisinage de a alors :

$$\lim_a \frac{1}{f} = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } \ell = \pm\infty \\ +\infty & \text{si } \ell = 0 \text{ et } f > 0 \text{ au voisinage de } a \\ -\infty & \text{si } \ell = 0 \text{ et } f < 0 \text{ au voisinage de } a \\ \text{n'existe pas sinon} & \end{cases}$$

Preuve : Dans le dernier cas on a $\ell = 0$ et sur tout voisinage de a f prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives (f n'est pas de signe constant), on peut donc construire deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers a et telles que $f(u_n) > 0$ et $f(v_n) < 0$, mais alors $\frac{1}{f(u_n)} \to +\infty$ et $\frac{1}{f(v_n)} \to -\infty$, donc $\frac{1}{f}$ n'a pas de limite en a. □

☞**Exemples** :
- Soit $a \in \mathbb{R}, \lim\limits_a x = a$ d'où $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_a x^n = a^n$ (encore vrai pour $n = 0$). On en déduit que si P est une fonction polynomiale, alors $\lim\limits_a \mathrm{P} = \mathrm{P}(a)$.
- Si $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est une fraction rationnelle et si $\mathrm{Q}(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_a \mathrm{R} = \mathrm{R}(a)$.

2) Limite et relation d'ordre

Théorème 11.7
Soient $f, g, h : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ trois fonctions et soit a un élément de I ou une extrémité de I.
- *On suppose qu'au voisinage de a, $f \leqslant g$, alors :*
  - *Si $\lim\limits_a f = +\infty$ alors $\lim\limits_a g = +\infty$.*
  - *Si $\lim\limits_a g = -\infty$ alors $\lim\limits_a f = -\infty$.*
- *Si $f \leqslant h \leqslant g$ au voisinage de a et si $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_a h = \ell$ (théorème des gendarmes ou de l'étau).*
- *Si $f \leqslant g$ au voisinage de a et si f et g ont chacune une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_a f \leqslant \lim\limits_a g$ (théorème du passage à la limite).*
- *Si $\lim\limits_a f = 0$ et si g est bornée* ***au voisinage de*** *a, alors $\lim\limits_a f \times g = 0$.*
- *Si $\lim\limits_a f = +\infty$ (respectivement $-\infty$) et si g est minorée au voisinage de a (respectivement majorée), alors $\lim\limits_a f + g = +\infty$ (respectivement $-\infty$).*

Preuve : Supposons $\lim\limits_a f = +\infty$, soit (u_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a, à partir d'un certain rang, on a $f(u_n) \leqslant g(u_n)$, or $f(u_n) \to +\infty$, donc $g(u_n) \to +\infty$ et par conséquent $\lim\limits_a g = +\infty$. Pour le deuxième cas, on raisonne sur $-f$ et $-g$.

Pour les autres points on procède de la même façon, en se ramenant aux suites. □

Remarque 11.2 –
- *Si $|f| \leqslant g$ au voisinage de a et si $\lim\limits_a g = 0$, alors $\lim\limits_a f = 0$.*
- *On peut avoir $f < g$ au voisinage de a et $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g$. Dans un passage à la limite les inégalités deviennent larges.*

3) Limite et composition des fonctions

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, soit a un élément de I ou une extrémité de I, et soit $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ une autre fonction avec $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{J}$.

Théorème 11.8
Si $\lim\limits_a f = b$, alors b appartient à J ou b est une extrémité de J.

Preuve : Il suffit de distinguer les cas sur J, par exemple, si $\mathrm{J} =]\alpha;\beta[$, alors $\forall\ x \in \mathrm{I}, \alpha < f(x) < \beta$, par passage à la limite, on obtient $\alpha \leqslant b \leqslant \beta$. Les autres cas se traitent de la même façon. □

Théorème 11.9 (composition des limites)

Si $\lim\limits_a f = b$ *et* $\lim\limits_b g = \ell$ *(dans* $\overline{\mathbb{R}}$*), alors* $\lim\limits_a g \circ f = \ell$.

Preuve : Soit (u_n) une suite d'éléments de I qui tend vers a, la suite $(f(u_n))$ est une suite d'éléments de J qui tend vers b, donc la suite $(g[f(u_n)])$ tend vers ℓ, ce qui prouve que $\lim\limits_a g \circ f = \ell$. □

Dans la pratique, ce théorème est parfois appelé **changement de variable** dans une limite. Il dit en effet que si on pose $X = f(x)$, alors comme $X \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$, on a $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{X \to b} g(X) = \ell$.

★**Exercice 11.1** *Calculer* $\lim\limits_{0^+} f$ *avec* $f(x) = \frac{e^{\sin(x)\ln(x)} - 1}{\sin(x)\ln(x)}$.

4) Limite et sens de variation

Théorème 11.10

Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *est croissante, en notant* a *la borne de gauche de* I *et* b *la borne de droite :*
- *si* f *est majorée, alors* f *admet une limite finie à gauche en* b *qui est* $\lim\limits_{b^-} f = \sup\limits_{x \in]a;b[} f(x)$. *Si de plus si* $b \in \mathrm{I}$, *alors* $\lim\limits_{b^-} f \leqslant f(b)$.
- *si* f *est non majorée, alors* f *admet* $+\infty$ *comme limite à gauche en* b.
- *si* f *est minorée, alors* f *admet une limite finie à droite en* a *qui est* $\lim\limits_{a^+} f = \inf\limits_{x \in]a;b[} f(x)$. *Si de plus si* $a \in \mathrm{I}$, *alors* $\lim\limits_{a^+} f \geqslant f(a)$.
- *si* f *est non minorée, alors* f *admet* $-\infty$ *comme limite à droite en* a.

Preuve : Démontrons deux cas :

Si f est majorée, soit $S = \sup\limits_{]a;b[} f$, soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel $x_0 \in]a;b[$ tel que $S - \varepsilon < f(x_0)$. Si $x \in]x_0;b[$, alors f étant croissante, $S - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant S < S + \varepsilon$ ce qui entraîne $|f(x) - S| < \varepsilon$ et donc $\lim\limits_{b^-} f = S$. Si de plus $b \in \mathrm{I}$, alors comme f est croissante, f est majorée sur $]a;b[$ par $f(b)$, donc on a $S \leqslant f(b)$.

Si f est croissante non minorée, soit $A \in \mathbb{R}$ ce n'est pas un minorant de f, donc il existe un réel $x_0 \in]a;b[$ tel que $f(x_0) < A$. Si $x \in]a;x_0[$, alors f étant croissante, $f(x) \leqslant f(x_0) < A$ ce qui entraîne $f(x) < A$ et donc $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$. □

Remarque 11.3 –

a) *Si* f *est croissante majorée sur* I *alors* f *admet une limite finie en* b^- *(limite non atteinte sur* $]a;b[$ *si la croissance est stricte).*

b) *Si* f *est croissante non majorée sur* I *alors* f *a pour limite* $+\infty$ *en* b^-.

c) *Si* f *est croissante minorée sur* I *alors* f *admet une limite finie en* a^+ *(limite non atteinte sur* $]a;b[$ *si la croissance est stricte).*

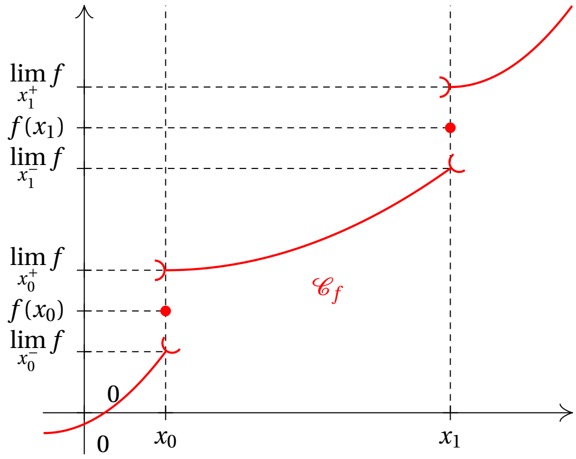
d) *Si* f *est croissante non minorée sur* I *alors* f *a pour limite* $-\infty$ *en* a^+.

☞**Exemple** : Soit $f(x) = \ln(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*, \ln(2^n) = n\ln(2)$, or $\ln(2) > 0$ car $1 < 2$ et f est strictement croissante, donc $n\ln(2) \to +\infty$, ce qui prouve que f est non majorée, comme elle est croissante, on a $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Théorème 11.11 (de la limite monotone)

Si f *est croissante sur* I, *soit* a *et* b *les bornes de* I *(dans* $\overline{\mathbb{R}}$*), pour tout réel* $x_0 \in]a;b[$, f *admet une limite finie à droite et à gauche en* x_0, *de plus on a :* $\lim\limits_{x_0^-} f \leqslant f(x_0) \leqslant \lim\limits_{x_0^+} f$. *Et si* $x_1 \in]a;b[$ *avec* $x_0 < x_1$, *alors :* $\lim\limits_{x_0^+} f \leqslant \lim\limits_{x_1^-} f$.

Preuve : Sur l'intervalle $]a;x_0[$, la fonction f est croissante et majorée par $f(x_0)$, donc la fonction f a une limite finie à gauche en x_0 et d'après le théorème précédent : $\lim\limits_{x_0^-} f = \sup\limits_{t \in]a;x_0[} f(t) \leqslant f(x_0)$. Le raisonnement est le même à droite. Si $x_0 < x_1 < b$, on applique le théorème précédent sur l'intervalle $]x_0;x_1[$: $\lim\limits_{x_0^+} f = \inf\limits_{t \in]x_0;x_1[} f(t) \leqslant \sup\limits_{t \in]x_0;x_1[} f(t) = \lim\limits_{x_1^-} f$. □



Remarque 11.4 – *En changeant f et $-f$ et en utilisant que pour une partie non vide* A *de* $\mathbb{R}$ *:* $\inf(\mathrm{A}) = -\sup(-\mathrm{A})$, *on obtient deux théorèmes analogues aux précédents pour les fonctions décroissantes.*

III CALCULS DE LIMITES

1) Comparaison des fonctions

Définition 11.4

Soient $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et soit $a \in \mathrm{I}$ ou une extrémité de I. On dit que :

- *f est dominée par g au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V de a, et une fonction $\varepsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{I}, f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec ε* ***bornée****. Notation : $f(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$.*
- *f est négligeable devant g au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V de a, et une fonction $\varepsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{I}, f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Notation : $f(x) = \underset{a}{o}\big(g(x)\big)$.*
- *f est équivalente à g au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V de a, et une fonction $\varepsilon : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ tels que : $\forall\, x \in \mathrm{V} \cap \mathrm{I}, f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 1$. Notation : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.*

Théorème 11.12 (Caractérisations)

Lorsque la fonction g ***ne s'annule pas au voisinage de*** *a (sauf peut être en a) :*

- $f(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ *si et seulement si* $\begin{cases} \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a \\ \text{si } a \in \mathrm{I} \text{ alors } g(a) = 0 \implies f(a) = 0 \end{cases}$.
- $f(x) = \underset{a}{o}\big(g(x)\big)$ *si et seulement si* $\begin{cases} \lim\limits_{a} \frac{f}{g} = 0 \\ \text{si } a \in \mathrm{I} \text{ alors } f(a) = 0 \end{cases}$.
- $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *si et seulement si* $\begin{cases} \lim\limits_{a} \frac{f}{g} = 1 \\ \text{si } a \in \mathrm{I} \text{ alors } g(a) = f(a) \end{cases}$.

Preuve : Celle - ci est simple et laissée en exercice. □

Remarque 11.5 –

a) $f(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}(1)$ *signifie que la fonction f est bornée au voisinage de a.*

b) $f(x) = \underset{a}{o}(1)$ *signifie que* $\lim\limits_{a} f = 0$.

c) Si $f(x) = \underset{a}{o}\big(g(x)\big)$ *alors* $f(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$.

d) Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ *alors* $f(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$.

e) Si $f(x) = \underset{a}{o}\big(g(x)\big)$ *et* $g(x) = \underset{a}{o}(h(x))$, *alors* $f(x) = \underset{a}{o}(h(x))$ *(transitivité).*

f) Si $f(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ *et* $g(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}(h(x))$, *alors* $f(x) = \underset{a}{\mathrm{O}}(h(x))$ *(transitivité)*

g) $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{a}{o}\big(g(x)\big)$.

Théorème 11.13

La relation « ... est équivalente à ... au voisinage de a » est une relation d'équivalence dans $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathbb{R})$, c'est à dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. De plus :

- *Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ alors $\lim_a f = \ell$ équivaut à $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.*
- *Si $f(x) = \underset{a}{o}\big(g(x)\big)$ alors $f(x)+g(x) \underset{a}{\sim} g(x)$.*

Preuve : Celle - ci est simple et laissée en exercice. □

2) Les exemples classiques

Théorème 11.14 (croissances comparées)

Soient $\alpha,\beta \in]0;+\infty[$:

- *Si $\alpha < \beta$ alors : $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta = \underset{0}{o}(x^\alpha)$.*
- *$[\ln(x)]^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$ et $|\ln(x)|^\alpha = \underset{0}{o}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$.*
- *$x^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left(e^{x\beta}\right)$ et $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left(e^{x^\beta}\right)$.*
- *Si $a > 1$ alors $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(a^x)$.*

Preuve : Identique à celle des suites. □

Théorème 11.15 (les équivalents usuels)

- *Si f est dérivable en 0 et si $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} f'(0)x$.*
- *$\sin(x) \underset{(0)}{\sim} x$; $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$; $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$; $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$; $1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$; $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.*
- *Soit $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ une fonction polynomiale avec $a_p \neq 0$, alors $\mathrm{P}(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_p x^p$ (équivalence avec le terme de plus haut degré).*
- *Soit $\mathrm{Q}(x) = \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{R}(x)}$ une fraction rationnelle avec $a_p x^p$ le terme de plus haut degré de P $(a_p \neq 0)$ et $b_r x^r$ celui de R $(b_r \neq 0)$, alors $\mathrm{Q}(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_r} x^{p-r}$ (équivalence avec le rapport des termes de plus haut degré).*

Preuve : Identique à celle des suites. □

Théorème 11.16 (changement de variable)

Soient $f,g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Im}(\varepsilon) \subset \mathrm{J}$ et soit $a \in \mathrm{I}$ ou une extrémité de I. Si $\lim_a \varepsilon = b$ et si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$, alors : $f(\varepsilon(x)) \underset{a}{\sim} g(\varepsilon(x))$.

Preuve : Celle - ci découle du théorème de composition des limites. □

Remarque 11.6 – *Pour la recherche d'un équivalent en a, on peut toujours se ramener en 0 :*

- *Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $u = x - a (= \varepsilon(x))$, on a alors $u \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on pose $h(u) = f(x) = f(u+a)$. Si $h(u) \underset{0}{\sim} g(u)$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} g(x-a)$.*
- *Si $a = \pm\infty$ alors on pose $u = \frac{1}{x} (= \varepsilon(x))$, on a alors $u \underset{x\to a}{\to} 0$, on pose $h(u) = f(x) = f(\frac{1}{u})$. Si $h(u) \underset{0}{\sim} g(u)$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} g(\frac{1}{x})$.*

3) Propriétés

Il découle de la définition :

Théorème 11.17

Soient $f,g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et soit $a \in \mathrm{I}$ ou une extrémité de I :

- *Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a.*
- *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $\lim_a g = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_a f = \ell$.*
- *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$, alors $f \times h \underset{a}{\sim} g \times k$ (compatibilité avec la multiplication).*

– Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$ (compatibilité avec le passage à l'inverse).
– Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g > 0$ au voisinage de a, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ pour tout réel α.

Remarque 11.7 –

– *Il n'y a pas compatibilité avec l'addition en général. Par exemple :* $x + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} x$ *et* $-x \underset{+\infty}{\sim} 1 - x$*, mais* $\frac{1}{x}$ *n'est pas équivalent à 1 au voisinage de* $+\infty$.
– *Ces propriétés sont utiles pour les calculs de limites qui ne peuvent pas être faits directement, on essaie de se ramener à un équivalent plus simple (s'il y en a ...) dont on sait calculer la limite.*

★**Exercice 11.2**

1/ *Limite en* $+\infty$ *de* $(1 + \frac{1}{x})^x$.

2/ *Calculer* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)^x - 1}{\sqrt{x}\ln(x)}$.

IV EXTENSION AUX FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

1) Définition de la limite

Les fonctions à valeurs complexes ont été introduites au début du chapitre 6. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction, on note $u = \mathrm{Re}(f)$ (partie réelle de f) et $v = \mathrm{Im}(f)$ (partie imaginaire de f), on rappelle que u et v sont des fonctions de I vers $\mathbb{R}$, et $\forall\ t \in \mathrm{I}, f(t) = u(t) + i\,v(t)$.

La fonction **conjuguée** de f et la fonction $\overline{f} : t \mapsto u(t) - i\,v(t)$.

La fonction **module** de f est la fonction $|f| : t \mapsto |f(t)| = \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$.

La fonction f est bornée sur I si et seulement si $\exists\ \mathrm{M} \in \mathbb{R}^+, \forall\ t \in \mathrm{I}, |f(t)| \leqslant \mathrm{M}$. Ceci équivaut à dire que les fonctions u et v sont bornées.

L'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{C}$ est notée $\mathscr{F}(\mathrm{I}, \mathbb{C})$, pour les opérations usuelles sur les fonctions, c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un anneau commutatif non intègre.

Définition 11.5

Soit $\ell \in \mathbb{C}$*, et soit* a *un élément de* I *ou une extrémité de* I*. On dira que la fonction* f *a pour limite* ℓ *en* a *lorsque* $\lim\limits_{t \to a} |f(t) - \ell| = 0$*. C'est à dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{V}, \text{ voisinage de } a, \forall t \in \mathrm{I}, t \in \mathrm{V} \implies |f(t) - \ell| < \varepsilon.$$

★**Exercice 11.3** *Soit* $f(t) = \frac{e^{it}}{i+t}$*, déterminer la limite de* f *en* $+\infty$.

2) Propriétés

Théorème 11.18

$\lim\limits_{t \to a} |f(t) - \ell| = 0 \iff \lim\limits_{t \to a} \mathrm{Re}(f(t)) = \mathrm{Re}(\ell)$ ***et*** $\lim\limits_{t \to a} \mathrm{Im}(f(t)) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Preuve : Celle - ci découle de l'inégalité : $\forall\ t \in \mathrm{I}$,

$\max(|\mathrm{Re}(f(t)) - \mathrm{Re}(\ell)|, |\mathrm{Im}(f(t)) - \mathrm{Im}(\ell)|) \leqslant |f(t) - \ell| = \sqrt{|\mathrm{Re}(f(t)) - \mathrm{Re}(\ell)|^2 + |\mathrm{Im}(f(t)) - \mathrm{Im}(\ell)|^2}$. □

Connaissant les propriétés des limites (finies) des fonctions à valeurs réelles, on peut déduire celles des fonctions à valeurs complexes en raisonnant sur les parties réelles et imaginaires :

– $\lim\limits_a f = \ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui tend vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ.
– Si $\lim\limits_a f = \ell \in \mathbb{C}$, alors f est bornée au voisinage de a.
– Si $\lim\limits_a f = \ell$, $\lim\limits_a g = \ell'$, alors $\lim\limits_a f + g = \ell + \ell'$, $\lim\limits_a f \times g = \ell\ell'$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}, \lim\limits_a \lambda f = \lambda\ell$.
– Si $\lim\limits_a f = \ell$ alors $\lim\limits_a \overline{f} = \overline{\ell}$ et $\lim\limits_a |f| = |\ell|$.
– Si $\lim\limits_a f = \ell \in \mathbb{C}^*$, alors au voisinage de a f ne s'annule pas et $\lim\limits_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.

V SOLUTION DES EXERCICES

Solution 11.1 *On pose* $X = \sin(x)\ln(x)$, *on a* $X = \frac{\sin(x)}{x} x\ln(x)$, *donc* $\lim_{0^+} X = 0$, *or* $\lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$, *la limite cherchée vaut donc 1.*

Solution 11.2

1/ *On a* $f(x) = \exp(x\ln(1+\frac{1}{x}))$, *or* $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ *car* $\frac{1}{x} \underset{+\infty}{\to} 0$, *donc* $x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} 1$, *la limite cherchée est donc égale à 1.*

2/ *On a* $\sin(x)^x = \exp(x\ln(\sin(x)))$, *or* $\ln(\sin(x)) = \ln(\frac{\sin(x)}{x}) + \ln(x) = \ln(x)\left[1 + \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{\ln(x)}\right] \underset{0}{\sim} \ln(x)$ *et donc* $x\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} x\ln(x) \underset{0}{\to} 0$, *d'où :* $\exp(x\ln(\sin(x))) - 1 \underset{0}{\sim} x\ln(\sin(x)) \underset{0}{\sim} x\ln(x)$, *par conséquent* $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, *et donc la limite cherchée est égale à 0.*

Solution 11.3 *On a* $|f(t)| = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, *donc* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.