DS n°9 du samedi 24 juin

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

1 Exercices

Exercice 1 (Matrices de déterminant 1) Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On considère l'ensemble :

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

1. Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. Justifier que A est inversible. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soient A et B deux matrices de $SL_n(\mathbb{R})$. Démontrer que les matrices AB et A^{-1} sont encore dans $SL_n(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quant à la structure de $SL_n(\mathbb{R})$?
3. L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les coefficients $a_{i,j}$ valent $\min(i,j)$. Calculer $\det A$.

Exercice 3 (Nature de série) Déterminer la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \frac{(n^2+1)\cos(n)}{n^5+3n+1}$ 2. $u_n = \frac{3^n}{n^2}$ 3. $u_n = \sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}$ 4. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{(n+3)\ln n}$

2 Problème : somme de deux lois uniformes

Le but de ce problème est de démontrer que même en utilisant deux dés truqués, (donc des dés dont les six faces ne sont pas équiprobables), leur somme Z ne peut jamais suivre une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

2.1 Le cas des dés équilibrés

On lance deux dés équilibrés et on note Z la somme des deux résultats obtenus.

1. Déterminer $P(Z=2)$ et $P(Z=3)$. La variable Z suit-elle une loi uniforme $[\![2,12]\!]$?
2. On note X_1 la valeur du premier dé. Les variables X_1 et Z sont-elles indépendantes ?
3. Calculer l'espérance de Z.

2.2 Notion de fonction génératrice

Définition 1 *Soit X un variable aléatoire définie sur un univers fini Ω muni d'une probabilité P. On suppose que X prend des valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose pour tout $t \in]0,1[$,*

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X=k)t^k.$$

La fonction G_X est appelée fonction génératrice de X.

Remarque : puisque X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, à partir d'un certain rang, les nombres $P(X=k)$ sont nuls, ainsi la somme est bien définie. La fonction G_X est donc une fonction polynomiale.

4. Donner la fonction génératrice d'une variable Z suivant une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.
5. Donner la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

Soit X et Y deux variables aléatoires finies à valeurs dans $\mathbb{N}$.

6. Justifier avec soin que si $G_X = G_Y$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(X = k) = P(Y = k)$.
7. On suppose en plus que X et Y sont indépendantes. Démontrer que
$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$
8. Une application : soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. Calculer la fonction génératrice de $S = X_1 + \cdots + X_n$, en déduire la loi de S.

2.3 Application à la somme de deux dés

On suppose désormais jusqu'à la fin de l'exercice que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes prenant des valeurs dans $[\![1, 6]\!]$ (mais pas forcément de façon équiprobable). On pose $Z = X + Y$. On souhaite prouver que Z ne suit pas une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. On raisonne pour cela par l'absurde, en supposant que Z suit une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$

On note Q le polynôme défini par $\forall t \in \mathbb{R},\ Q(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{10}$.

9. Démontrer que Q n'admet pas de racines réelles.
10. Démontrer, à l'aide de fonctions génératrices, l'existence de deux polynômes Q_1 et Q_2, à coefficients réels, de degré 5 tels que :
$$\forall t \in]0, 1[,\ Q_1(t)Q_2(t) = \frac{1}{11}(1 + t + t^2 + \cdots + t^{10}).$$
11. Conclure à une contradiction.

3 Pour finir

Exercice 4 (Théorème de point fixe de Picard) Soit I un intervalle fermé [1] de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$:
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$
Le but de l'exercice est de démontrer que f admet un unique point fixe dans I. On note u la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et de premier terme u_0.

1. Démontrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge absolument.
2. En déduire que la suite u converge vers un point fixe a de f.
3. Démontrer que a est l'unique point fixe de f dans I.
4. Démontrer à l'aide de la fonction racine carrée sur $]1, +\infty[$ que le théorème de Picard est faux si I n'est pas supposé fermé.

Exercice 5 (Bonus ?) On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ dont la signature vaut 1. On fixe τ une transposition de $\mathcal{S}_n$.

1. Démontrer que l'application $f : \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ ($\mathcal{S}_n$ privé de $\mathcal{A}_n$) sur $\mathcal{A}_n$.
2. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.
3. Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent une même loi. Calculer $E(\det M)$.

1. Un intervalle fermé est un intervalle qui est soit $\mathbb{R}$, soit $[a, b]$,soit $[a, +\infty[$, soit $]-\infty, b]$ avec a et b des réels.