DEVOIR SURVEILLÉ n°5 du samedi 21 décembre

Durée : 4 heures de 8h à 12h. Les calculatrices sont interdites.
Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

1 Exercices

Exercice 1 (Question de cours) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Démontrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Démontrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f : E \to G$ est surjective.

Exercice 2 (Questions en vrac)

1. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x-y, z)$. Démontrer que f n'est pas injective mais qu'elle est surjective.
2. Donner la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ de $P = X^5 - X^4 + 2X - 2$.
3. Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 sachant que 1 est racine de P et que i est racine double de P.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $P = (X^{n+1} - 1)(X^n - 1)$ est divisible par $(X + 1)(X - 1)^2$.
5. Déterminer une application bijective $f : [0, 1] \to [5, 7]$.

2 Arithmétique

Exercice 3 (Repunits) On pose $r_1 = 1,\ r_2 = 11,\ r_3 = 111$ et plus généralement pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n l'entier dont l'écriture décimale est constitué de n fois le chiffre 1 :

$$r_n = \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ chiffres}}.$$

Les nombres r_n sont appelés des «repunits» (répétitions de l'unité).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que 3 divise r_n si et seulement si 3 divise n.

Pour les questions suivantes, on pourra utiliser :

$$r_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

2. On prend pour cette question $n \geqslant 2$. Justifier que 4 divise 10^n. En déduire que r_n n'est pas un carré, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entier $a \in \mathbb{N}$ tel que $r_n = a^2$.
3. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de n. Démontrer que r_a divise r_n.
4. En déduire que si r_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier.
5. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 (Irrationnalité de racine cubique de 2) Le but de l'exercice est de prouver que le nombre $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel. On suppose que r est une racine rationnelle du polynôme $P = X^3 - 2$ que l'on écrit $r = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

1. Justifier que q divise p^3. En déduire avec soin que $q = 1$.
2. Démontrer que p divise 2.
3. En déduire que P n'admet pas de racines rationnelles, puis conclure.

3 PROBLEME : Calcul de $\zeta(2)$ par la méthode de Papadimitriou

On note $(s_n)_n$ la suite définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On déjà montré plusieurs fois que la suite (s_n) converge. Le but de ce problème est de déterminer sa limite [1] .

Dans tout le problème, p désigne un entier **fixé** avec $p \in \mathbb{N}^*$ et on note P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

où $\binom{2p+1}{2k+1}$ désigne le coefficient binomial $p+1$ parmi $2k+1$.

1. Donner le degré de P ainsi que son coefficient dominant.
2. *Une identité trigonométrique*
   (a) Soit $\phi \in \mathbb{R}$. Développer $(\cos\phi + i\sin\phi)^{2p+1}$ puis en déduire avec soin que :
   $$\sin((2p+1)\phi) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\phi)\sin^{2k+1}(\phi).$$
   (b) En déduire que pour tout réel $\phi \not\equiv 0[\pi]$, on a
   $$\sin((2p+1)\phi) = \sin^{2p+1}(\phi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\operatorname{cotan}^2\phi)^{p-k}$$
   où $\operatorname{cotan}\phi = \dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$.
3. *Racines de P*
   (a) Soit $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$. Déterminer à l'aide de la question précédente la valeur de $P(\gamma_k)$.
   (b) Démontrer que les nombres γ_k pour $k \in [\![1, p]\!]$ sont deux à deux distincts.
   (c) En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$, donner sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.
4. Rappeler la formule du cours, reliant la somme des racines d'un polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ aux coefficients de ce polynôme. En déduire que
   $$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}.$$
5. Déduire de la formule précédente l'égalité suivante
   $$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$
6. *Encadrement de s_n*
   (a) On admet que pour tout réel $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $0 < \sin\phi < \phi < \tan\phi$. En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, on a
   $$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}.$$
   (b) En déduire la valeur de S, la limite de la suite (s_n).

Fin de l'énoncé

1. Plus généralement, on montre que pour $s > 1$, la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ converge et on note $\zeta(s)$ sa limite