

# Chapitre 13

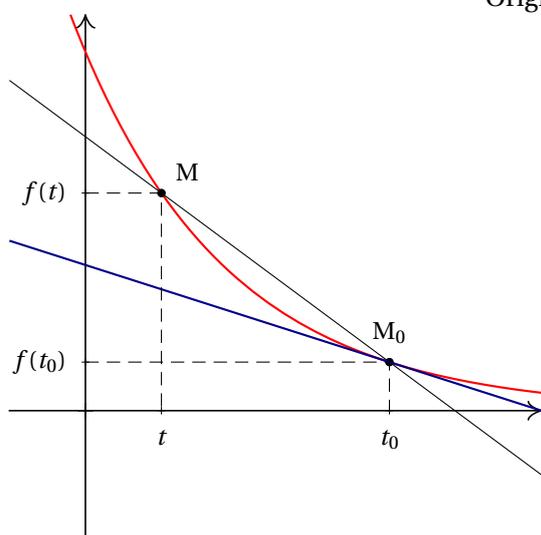
## Dérivation

### Sommaire

<b>I</b>	<b>Dérivée première</b>	<b>123</b>
1)	Définition	123
2)	Théorème généraux	124
3)	Dérivabilité à gauche et à droite	125
4)	Dérivée d'une bijection réciproque	125
<b>II</b>	<b>Applications de la dérivation</b>	<b>126</b>
1)	Théorème de Rolle	126
2)	Les accroissements finis	127
3)	Sens de variation	128
<b>III</b>	<b>Dérivées successives</b>	<b>129</b>
1)	Classe d'une application	129
2)	Formule de Leibniz	130
3)	Classe d'une composée	130
4)	Classe d'une réciproque	130
<b>IV</b>	<b>Extension aux fonctions à valeurs complexes</b>	<b>131</b>
1)	Définition	131
2)	Propriétés	131
3)	Classe d'une fonction	132
<b>V</b>	<b>Solution des exercices</b>	<b>132</b>

## I DÉRIVÉE PREMIÈRE

### 1) Définition



Origine géométrique :

La droite qui joint les points  $M(t, f(t))$  et  $M_0(t_0, f(t_0))$  (sécante) a pour équation :

$$y = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}(x - t_0) + f(t_0)$$

Lorsque l'on rapproche  $t$  de  $t_0$ , cette droite pivote autour du point  $M_0$  et, lorsque la courbe est régulière, semble se rapprocher d'une position « limite » que nous définirons comme la tangente au point  $M_0$ . Le coefficient directeur de cette droite « limite » doit être la limite lorsque  $t$  tend vers  $t_0$  du coefficient directeur de la sécante, c'est dire

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

### Définition 13.1

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et soit  $t_0 \in I$ , on dit que  $f$  est **dérivable en**  $t_0$  lorsque la fonction  $t \mapsto \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$  admet une limite **finie** en  $t_0$ . Si c'est le cas, cette limite est notée  $f'(t_0)$  et appelée **nombre dérivé de  $f$  en  $t_0$** . Lorsque  $f$  est dérivable en tout point de  $I$  on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  et la fonction de  $I$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $t$  associe  $f'(t)$  est appelée **dérivée de  $f$  sur  $I$** , on la note  $f'$  ou bien  $\frac{df}{dt}$ . L'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$  est noté  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ . Si le plan est muni d'un repère orthonormé et si  $f$  est dérivable en  $t_0$ , la droite d'équation  $y = f'(t_0)(x - t_0) + f(t_0)$  est appelée tangente à la courbe au point d'abscisse  $t_0$ . Si le taux d'accroissement de  $f$  en  $t_0$  a une limite infinie et si  $f$  est continue en  $t_0$ , alors on dit que la courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse  $t_0$ , d'équation  $x = t_0$ .

**Remarque 13.1** – Les fonctions trigonométriques, logarithme, exponentielle, polynomiales et rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition. Mais :

### Attention!

La fonction valeur absolue et la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  avec  $0 < \alpha < 1$ , ne sont pas dérivables en 0. La fonction partie entière n'est pas dérivable aux points entiers relatifs (pas continue).

### Théorème 13.1 (définition équivalente)

$f$  est dérivable en  $t_0$  et  $f'(t_0) = a$  si et seulement si  $f(t) = f(t_0) + a(t - t_0) + (t - t_0)o_1(1)$ .

On dit alors que  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en  $t_0$ .

**Preuve** : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

## 2) Théorème généraux

### Théorème 13.2 (Dérivabilité et continuité)

Si  $f$  est dérivable en  $t_0$ , alors  $f$  est continue en  $t_0$  mais la réciproque est fausse.

**Preuve** : Il suffit d'appliquer la définition équivalente ci-dessus pour voir que  $\lim_{t \rightarrow t_0} f = f(t_0)$ . Pour la réciproque, on a par exemple la fonction  $t \mapsto |t|$  qui est continue en 0 mais non dérivable. □

### Théorème 13.3 (Théorèmes généraux)

• Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$  et si  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors les fonctions  $f + g$ ,  $f \times g$  et  $\alpha f$  sont dérivables sur  $I$  avec les formules :

- $(f + g)' = f' + g'$ .
- $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$ .
- $(\alpha f)' = \alpha f'$ .

• Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et **ne s'annule pas** alors  $\frac{1}{f}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$ .

• Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $g$  est dérivable sur  $J$  avec  $\text{Im}(f) \subset J$ , alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et  $(g \circ f)' = f' \times [g' \circ f]$ .

**Preuve** : Les deux premiers points ne posent pas de difficultés, passons au troisième : soit  $x_0 = f(t_0)$ , posons :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ g'(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

alors  $h$  est continue en  $x_0$  et pour  $t \neq t_0$  on a  $\frac{g(f(t))-g(f(t_0))}{f(t)-f(t_0)} = h[f(t)] \times \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ , même si  $f(t) = f(t_0)$ , comme  $f$  est continue en  $t_0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(f(t))-g(f(t_0))}{f(t)-f(t_0)} = h(x_0) \times f'(t_0) = f'(t_0) \times g'(f(t_0))$ . □

Du troisième point découlent les formules de dérivation usuelles :

Fonction	Dérivée
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\tan(u)$	$u'(1 + \tan(u)^2) = \frac{u'}{\cos(u)^2}$
$\text{sh}(u)$	$u' \text{ch}(u)$
$\text{ch}(u)$	$u' \text{sh}(u)$
$\text{th}(u)$	$u'(1 - \text{th}(u)^2) = \frac{u'}{\text{ch}(u)^2}$
$e^u$	$u' e^u$
$\ln( u )$	$\frac{u'}{u}$
$u^\alpha$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$

**Remarque 13.2** – Il découle des théorèmes généraux que pour les opérations usuelles sur les fonctions  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  est un anneau et un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

★ **Exercice 13.1** Soit  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

1/ Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

2/ Montrer que  $f'$  n'est pas continue en 0.

### 3) Dérivabilité à gauche et à droite

#### Définition 13.2

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, et soit  $t_0 \in I$  :

• Si  $t_0 \neq \inf(I)$  : on dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $t_0$  lorsque le taux d'accroissement de  $f$  a une limite finie à gauche en  $t_0$ . Si c'est le cas, cette limite est notée  $f'_g(t_0)$  et la demi-droite d'équation

$$\begin{cases} y = f'_g(t_0)(x - t_0) + f(t_0) \\ x \leq t_0 \end{cases}, \text{ est appelée demi-tangente à la courbe au point d'abscisse } t_0.$$

• Si  $t_0 \neq \sup(I)$  : on dit que  $f$  est dérivable à droite en  $t_0$  lorsque le taux d'accroissement de  $f$  a une limite finie à droite en  $t_0$ . Si c'est le cas, cette limite est notée  $f'_d(t_0)$  et la demi-droite d'équation

$$\begin{cases} y = f'_d(t_0)(x - t_0) + f(t_0) \\ x \geq t_0 \end{cases}, \text{ est appelée demi-tangente à la courbe au point d'abscisse } t_0.$$

#### ☞ Exemples :

- La fonction valeur absolue est dérivable à gauche en 0, et  $f'_g(0) = -1$ , elle est dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = 1$ , mais elle n'est pas dérivable en 0 car  $-1 \neq 1$ , on dit que le point de la courbe d'abscisse 0 est un **point anguleux**.
- La fonction  $f(t) = \sqrt{|t|}$  n'est pas dérivable en 0, le taux d'accroissement tend vers  $+\infty$  en  $0^+$  et vers  $-\infty$  en  $0^-$ , on dit que le point de la courbe d'abscisse 0 est un point **de rebroussement de première espèce**.

#### Théorème 13.4

Soit  $t_0$  un point intérieur à  $I$ ,  $f$  est dérivable en  $t_0$  ssi  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $t_0$  avec  $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$ .

**Preuve** : Cela découle des propriétés des limites. □

### 4) Dérivée d'une bijection réciproque

#### Théorème 13.5

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue strictement monotone, alors  $f$  induit une bijection de  $I$  sur  $J = \text{Im}(f)$ . Soit  $y_0 = f(t_0) \in J$  ( $t_0 \in I$ ), si  $f$  est dérivable en  $t_0$  et si  $f'(t_0) \neq 0$ , alors la bijection réciproque,  $\phi$ , est dérivable en  $y_0$  et  $\phi'(y_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f' \circ \phi(y_0)}$ . Si  $f$  est dérivable en  $t_0$  et  $f'(t_0) = 0$ , alors  $\phi$  n'est pas

dérivable en  $y_0$  mais la courbe représentative de  $\phi$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $y_0$ .

**Preuve :** Soit  $t_0 \in I$  et  $y_0 = f(t_0)$ , pour  $y \in J \setminus \{y_0\}$ , on a  $\frac{\phi(y) - \phi(y_0)}{y - y_0} = \frac{t - t_0}{f(t) - f(t_0)}$  en posant  $t = \phi(y)$ ,  $\phi$  étant continue, lorsque  $y \rightarrow y_0$ , on a  $t \rightarrow t_0$  et donc  $\frac{t - t_0}{f(t) - f(t_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(t_0)}$  car  $f'(t_0) \neq 0$ . Ce qui prouve le premier résultat.

Si  $f'(t_0) = 0$ , comme  $f$  est monotone la fraction  $\frac{t - t_0}{f(t) - f(t_0)}$  garde un signe constant, donc sa limite lorsque  $y \rightarrow y_0$  est infinie, ce qui prouve le second résultat.  $\square$

### Remarque 13.3 –

- Si  $f: I \rightarrow J$  est bijective, continue, dérivable et si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors d'après le théorème précédent,  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et on a la formule :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

- Si  $f$  n'est pas dérivable en  $t_0$  mais si sa courbe a une tangente verticale en ce point, alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(t_0)$  et  $(f^{-1})'(y_0) = 0$  (car le taux d'accroissement de  $f$  en  $t_0$  a une limite infinie en  $t_0$ ).

### Exemples :

- La fonction  $\ln: ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, strictement croissante, dérivable et sa dérivée ne s'annule pas. Sa bijection réciproque, la fonction exponentielle, est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x)' = \frac{1}{\ln' \circ \exp(x)} = \exp(x).$$

- La fonction  $f: ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]-1; 1[$  définie par  $f(x) = \sin(x)$  est bijective, continue, dérivable et sa dérivée ( $f'(x) = \cos(x)$ ) ne s'annule pas sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ , donc la bijection réciproque arcsin, est dérivable sur  $]-1; 1[$  et :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{f'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Par contre la fonction arcsin n'est pas dérivable en  $\pm 1$  (une tangente verticale en ces points).

- La fonction  $f: ]0; \pi[ \rightarrow ]-1; 1[$  définie par  $f(x) = \cos(x)$  est bijective, continue, dérivable et sa dérivée ( $f'(x) = -\sin(x)$ ) ne s'annule pas sur  $]0; \pi[$ , donc la bijection réciproque arccos, est dérivable sur  $]-1; 1[$  et :

$$\arccos'(x) = \frac{1}{f'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Par contre la fonction arccos n'est pas dérivable en  $\pm 1$  (une tangente verticale en ces points).

- La fonction  $f: ]-\pi/2; \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \tan(x)$  est bijective, continue, dérivable et sa dérivée ( $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ ) ne s'annule pas, donc la bijection réciproque arctan, est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{f'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

## II APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

### 1) Théorème de Rolle



#### Théorème 13.6

Soit  $f: ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $]a; b[$  et soit  $t_0 \in ]a; b[$ . Si  $f$  admet un extremum local en  $t_0$ , alors  $f'(t_0) = 0$ , mais la réciproque est fautive.

**Preuve :** Supposons que  $f$  présente un maximum local en  $t_0$ , alors à gauche en  $t_0$  on a  $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq 0$ , d'où par passage à la limite en  $t_0$  :  $f'(t_0) \geq 0$ . À droite en  $t_0$  on a :  $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leq 0$ , d'où par passage à la limite en  $t_0$  :  $f'(t_0) \leq 0$ , par conséquent  $f'(t_0) = 0$ . Pour la réciproque il suffit de considérer la fonction  $x \mapsto x^3$  en 0.  $\square$

**Remarque 13.4 –** Dans le théorème ci-dessus, il est essentiel que  $t_0$  ne soit pas une borne de l'intervalle. Par exemple la fonction  $f(t) = 1 + t$  admet un maximum sur  $[0; 1]$  en  $t_0 = 1$  mais  $f'(t_0) \neq 0$ .

**Théorème 13.7 (de Rolle <sup>1</sup>)**

Si  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$  et si  $f(a) = f(b)$ , alors :  
il existe  $c \in ]a; b[$ ,  $f'(c) = 0$ .

**Preuve :** Si  $f$  est constante alors il n'y a rien à montrer. Si  $f$  n'est pas constante,  $\text{Im}(f) = [m; M]$  ( $f$  est continue sur le segment  $[a; b]$ ) avec  $m < M$ . Supposons  $f(a) \neq M$ , alors  $f(b) \neq M$  ou il existe  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = M$  donc  $c \in ]a; b[$ , d'après la proposition précédente (maximum global en  $c$ ) on a  $f'(c) = 0$ . Si  $f(a) = M$  alors  $f(a) \neq m$  et le même raisonnement s'applique avec le minimum.  $\square$

**Remarque 13.5 –**

- Ce théorème est faux si  $f$  n'est pas continue en  $a$  ou en  $b$  (prendre  $f(x) = x$  sur  $[0; 1[$  et  $f(1) = 0$ ).
- Ce théorème est faux si  $f$  est à valeurs complexes, par exemple  $f(t) = e^{it}$ , on a  $f(0) = f(2\pi)$  mais  $f'(t) = ie^{it}$  ne s'annule jamais.

★**Exercice 13.2** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable qui admet  $n$  racines distinctes, alors  $f'$  admet au moins  $n - 1$  racines distinctes.

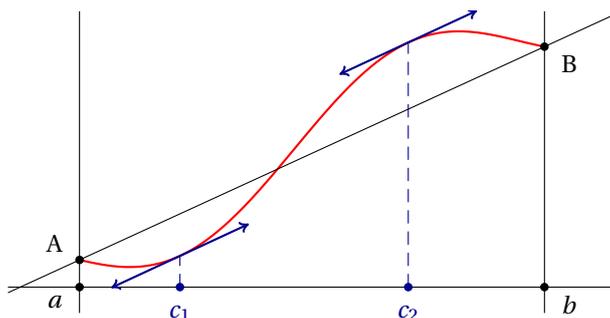
**2) Les accroissements finis****Théorème 13.8 (égalité de accroissements finis)**

Si  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$  alors :  
 $\exists c \in ]a; b[$ ,  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .

**Preuve :** Soit  $\phi(t) = t(f(b) - f(a)) - (b - a)f(t)$ , la fonction  $\phi$  est continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$ , de plus  $\phi(a) = af(b) - bf(a) = \phi(b)$ , d'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $\phi'(c) = 0$ , ce qui donne la relation.  $\square$

**Remarque 13.6 –**

- De même, si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $[a; b]$  et dérivables sur  $]a; b[$ , il existe  $c \in ]a; b[$  tel que :  
 $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$ .
- L'égalité s'écrit aussi :  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , ce qui signifie géométriquement qu'il existe un point de la courbe (d'abscisse  $c$ ) où la tangente est parallèle à la corde définie par le point d'abscisse  $a$  et le point d'abscisse  $b$ .
- Autre preuve : soit  $g$  la fonction affine prenant la même valeur que  $f$  en  $a$  et  $b$ ,  $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$ . On a  $f(a) - g(a) = f(b) - g(b)$ , d'après le théorème de Rolle il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $f'(c) = g'(c)$  ce qui donne  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

**Théorème 13.9 (inégalité des accroissements finis)**

Si  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a; b]$ , dérivable sur  $]a; b[$  et s'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que  
 $\forall x \in ]a; b[, m \leq f'(x) \leq M$ , alors :  
 $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$ .

**Preuve :** Celle-ci découle directement de l'égalité des accroissement finis.  $\square$

1. ROLLE Michel (1652 – 1719) : mathématicien français.

 **À retenir**

Si  $\forall t \in ]a; b[, |f'(t)| \leq M$ , alors  $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$ , et plus généralement :

$\forall x, y \in ]a; b[, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ , la fonction  $f$  est  $M$ -lipschitzienne.

Réciproquement, si  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur un intervalle  $I$ , alors tous les taux d'accroissements sont majorés en valeur absolue par  $M$ , et donc par passage à la limite,  $|f'| \leq M$ .

★ **Exercice 13.3** Soit  $f: ]a; b[ \rightarrow ]a; b[$  continue sur  $]a; b[$ , dérivable sur  $]a; b[$  telle que  $|f'| \leq k < 1$ , on considère la suite définie par  $u_0 \in ]a; b[$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1/ Montrer que  $f$  admet au moins un point fixe  $\ell$  et que celui-ci est unique.

2/ Montrer la suite  $u$  converge vers  $\ell$ .

 **Exemples :**

- Pour tout réel  $x$ ,  $\sin'(x) = \cos(x)$  et donc  $|\sin'(x)| \leq 1$ , on en déduit (IAF) que pour tous réels  $x$  et  $y$  on a  $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ . De la même façon, on montre que  $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$ .
- Pour tout  $x, y$  de  $[1; +\infty[$ , on a  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ .
- $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ .

 **Théorème 13.10 (limite de la dérivée)**

Soit  $f: ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $]a; b[$  et dérivable sur  $]a; b[$ . Si  $f'$  admet une limite  $\ell$  en  $b$ , alors :

- Si  $\ell \in \mathbb{R}$  alors  $f$  est dérivable en  $b$  et  $f'(b) = \ell$ .
- Si  $\ell = \pm\infty$  alors  $f$  n'est pas dérivable en  $b$ , mais il y a une tangente verticale pour la courbe représentative.

**Preuve :** D'après l'égalité des accroissements finis, pour  $t \in ]a; b[$ , il existe  $c_t \in ]t; b[$  tel que  $f(b) - f(t) = (b - t)f'(c_t) = (b - t)f'(c_t)$ , d'où  $\frac{f(t) - f(b)}{t - b} = f'(c_t)$ , mais si  $t$  tend vers  $b$ , alors  $c_t$  tend vers  $b$  et donc  $f'(c_t)$  tend vers  $\ell$ , d'où :  $\lim_{t \rightarrow b} \frac{f(t) - f(b)}{t - b} = \ell$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque 13.7** – Si  $f'$  n'a pas de limite en  $b$ , on ne peut rien dire en général.

On a un résultat analogue pour  $f: ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $]a; b[$ , dérivable sur  $]a; b[$ , avec  $\lim_{t \rightarrow a} f'(t) = \ell$ .

☞ **Exemple :** La fonction arcsin est dérivable sur  $] - 1; 1[$  et  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , cette dérivée a pour limite  $+\infty$  quand  $x \rightarrow 1$ . On retrouve ainsi que arcsin n'est pas dérivable en 1 et qu'il y a une tangente verticale en ce point pour la courbe.

### 3) Sens de variation

 **Théorème 13.11**

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$ , et dérivable sur  $I$  privé des ses bornes (noté  $\overset{\circ}{I}$ , intérieur de  $I$ ), on a les résultats suivants :

- $f$  est croissante si et seulement si  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) \geq 0$ .
- $f$  est décroissante si et seulement si  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) \leq 0$ .
- $f$  est constante si et seulement si  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) = 0$ .
- $f$  est strictement croissante si et seulement si  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) \geq 0$  et il n'existe aucun intervalle ouvert non vide inclus dans  $I$  sur lequel  $f'$  est constamment nulle.
- $f$  est strictement décroissante si et seulement si  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) \leq 0$  et il n'existe aucun intervalle ouvert non vide inclus dans  $I$  sur lequel  $f'$  est constamment nulle.

**Preuve :** Si  $f$  est croissante sur  $I$ , soit  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ , le taux d'accroissement de  $f$  en  $t_0$  est toujours positif, donc par passage à la limite, on a  $f'(t_0) \geq 0$ . Réciproquement, si  $f' \geq 0$  sur  $\overset{\circ}{I}$ , soit  $t < t'$  deux éléments de  $I$ , d'après l'égalité des accroissements finis, il existe  $c$  compris entre  $t$  et  $t'$  (strictement) tel que  $f(t) - f(t') = f'(c)(t - t') \leq 0$ , donc  $f(t) \leq f(t')$  i.e.  $f$  est croissante. Pour  $f$  décroissante on applique ce qui précède à  $-f$ . Pour  $f$  constante, il suffit de dire que  $f$  est à la fois croissante et décroissante.

Si  $f$  est strictement croissante, alors on sait que  $f' \geq 0$  sur  $\overset{\circ}{I}$ . Si  $f'$  est nulle sur un intervalle  $J \subset I$ , alors  $f$  est constante sur  $J$ , ce qui est absurde. Réciproquement, si  $\forall t \in \overset{\circ}{I}, f'(t) \geq 0$  et il n'existe aucun intervalle ouvert non vide inclus dans  $I$  sur lequel  $f'$  est constamment nulle, soit  $t < t'$  deux éléments de  $I$ , on sait que  $f(t) \leq f(t')$ , si on avait

$f(t) = f(t')$  alors  $\forall c \in [t; t'], f(t) = f(c) = f(t')$ , donc  $f$  est constante sur  $[t; t']$ , ce qui entraîne que  $f'$  est nulle sur  $]t; t'[$  : absurde, donc  $f(t) < f(t')$  i.e.  $f$  est strictement croissante.  $\square$

**Remarque 13.8** – Ce théorème est faux si  $I$  n'est pas intervalle, par exemple la fonction  $f(t) = \frac{1}{t}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  avec  $f' < 0$ , mais  $f$  n'est pas monotone sur  $\mathbb{R}^*$ .

### III DÉRIVÉES SUCCESSIVES

#### 1) Classe d'une application



#### Définition 13.3

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  lorsque  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et que la dérivée  $n^e$  de  $f$  est continue sur  $I$ . L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  est noté  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ . La dérivée  $n^e$  de  $f$  est notée  $f^{(n)}$  où  $\frac{d^n f}{dt^n}$ . Par convention, on pose  $f^{(0)} = f$ , on a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ .

#### Remarque 13.9 –

- $\mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ .
- Si  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  avec  $n \geq 1$ , alors  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, f^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(I, \mathbb{R})$ .

#### Exemples :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f : t \mapsto e^t$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $f^{(n)}(t) = e^t$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, f : t \mapsto t^n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\mathbb{R}$ , et  $f^{(p)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n!}{(n-p)!} t^{n-p} & \text{sinon} \end{cases}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, f : t \mapsto \frac{1}{t}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}^*$ , et  $f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, f : t \mapsto \ln(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $]0; +\infty[$ , et pour  $n \geq 1, f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{t^n}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, \cos$  et  $\sin$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\cos^{(n)}(t) = \cos(t + n\frac{\pi}{2}), \sin^{(n)}(t) = \sin(t + n\frac{\pi}{2})$ .

#### ★ Exercice 13.4

- 1/ Soit  $a \in \mathbb{R}$ , et  $f : x \mapsto \frac{1}{x-a}$ , montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et calculer  $f^{(n)}(x)$ .  
 2/ Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ , montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$  pour tout  $n$ , et calculer  $f^{(n)}(x)$ .



#### Définition 13.4

Lorsque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout entier  $n$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , l'ensemble des ces fonctions est noté  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ , et on a donc  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ .

#### Remarque 13.10 –

- $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ .
- Dire que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  revient à dire que  $f$  est dérivable autant de fois que l'on veut (infiniment dérivable), autrement dit  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ .

#### Exemples :

- Toute fonction polynomiale est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  (car la dérivée d'un polynôme est un polynôme).
- Toute fonction rationnelle est  $\mathcal{C}^\infty$  sur son ensemble de définition (car la dérivée d'une fonction rationnelle est une fonction rationnelle).
- Les fonctions  $\ln, \exp, \cos, \sin$  et  $\tan$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  sur leur ensemble de définition.

#### ★ Exercice 13.5 Étudier la classe sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^2|x|$ .



#### Théorème 13.12 (prolongement de classe $\mathcal{C}^n$ )

Soit  $f : [a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a; b[$  telle que toutes ses dérivées  $k^e$  ont une limite finie en  $b : \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \exists \ell_k \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow b} f^{(k)}(x) = \ell_k$ . Alors le prolongement de  $f$  obtenu en posant  $f(b) = \ell_0$ , est un prolongement de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a; b]$ , et on a  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, f^{(k)}(b) = \ell_k$ .

**Preuve :** Par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , c'est un prolongement par continuité de  $f$  en  $b$ . Supposons le théorème établi au rang  $n$  et que  $f$  vérifie les hypothèses au rang  $n + 1$ , en appliquant (HR), le prolongement de  $f$  obtenu en posant  $f(b) = \ell_0$ , est un prolongement de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a; b]$ , et on a  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, f^{(k)}(b) = \ell_k$ . Soit  $g = f^{(n)}$ , alors  $g$  est continue sur  $[a; b]$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a; b[$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g'(x) = \ell_{n+1} \in \mathbb{R}$ , on en déduit que  $g$  est dérivable en  $b$  (théorème sur la limite de la dérivée) et que  $g'(b) = \ell_{n+1}$ , ce qui entraîne que  $g'$  est continue en  $b$ . Finalement le prolongement de  $f$  est bien de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a; b]$ , et  $f^{(k)}(b) = \ell_k$  pour  $k \in \llbracket 0; n + 1 \rrbracket$ .  $\square$

## 2) Formule de Leibniz



### Théorème 13.13 (généraux)

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  alors :

- $f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et  $(\lambda.f)^{(n)} = \lambda.f^{(n)}$ .
- $f \times g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et on a la formule (de Leibniz) :  $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$ .

**Preuve :** Pour le dernier point : pour  $n = 0$  le résultat est vrai. Supposons le dernier point démontré au rang  $n \geq 0$  avec la formule de Leibniz, et supposons que  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ . En particulier  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^n$ , donc  $f \times g$  aussi et  $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$ , on en déduit donc que  $(f \times g)^{(n)}$  est dérivable sur  $I$  (somme de produits de fonctions dérivables) et sa dérivée est  $(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} \times g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}$ , ce qui donne  $f^{(n+1)} \times g + f \times g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n ((\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1})) f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}$ , c'est à dire  $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \times g^{(n+1-k)}$ , ce qui donne la formule au rang  $n + 1$ , de plus cette somme est une somme de fonctions continues, ce qui prouve que  $f \times g$  est bien de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$ .  $\square$



### Théorème 13.14

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et un anneau.

**Preuve :** Cela découle du théorème précédent (s.e.v et sous-anneau de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ).  $\square$

★**Exercice 13.6** Calculer de deux façons la dérivée  $n^e$  en 0 de la fonction  $x \mapsto (1 - x^2)^n$ . Quelle relation obtient-on ?

## 3) Classe d'une composée



### Théorème 13.15

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  avec  $\text{Im}(f) \subset J$ , alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ . En particulier, si  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  alors  $g \circ f$  aussi.

**Preuve :** Le théorème est vrai pour  $n = 0$  (composée de deux fonctions continues), supposons le vrai au rang  $n \geq 0$  et supposons  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , comme  $n + 1 \geq 1$ ,  $f$  et  $g$  sont dérivables, donc  $g \circ f$  est dérivable avec la formule  $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ , d'après l'hypothèse de récurrence,  $g' \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  (car  $g'$  et  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$ ), or  $f'$  est également de classe  $\mathcal{C}^n$ , par conséquent  $f' \times g' \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , ce qui signifie que  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ .  $\square$

### Remarque 13.11 –

- Il existe une formule qui exprime  $(g \circ f)'$  en fonction des dérivées de  $f$  et de  $g$ , mais ce n'est pas une formule simple.
- La fonction inverse  $g : x \mapsto \frac{1}{x}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ , si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  qui ne s'annule, alors la composée, i.e. la fonction  $\frac{1}{f}$ , est de classe  $\mathcal{C}^n$  (même si  $n = \infty$ ).
- On retrouve donc les mêmes théorèmes généraux que pour la continuité et la dérivabilité.

## 4) Classe d'une réciproque



### Théorème 13.16

Soit  $f : I \rightarrow J$  une bijection de  $I$  sur  $J = \text{Im}(f)$ , de classe  $\mathcal{C}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors la bijection réciproque  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$  (i.e. de même classe que  $f$ ).

**Preuve :** On sait déjà que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  et que  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ , on voit alors que  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ , le théorème est donc vrai pour  $n = 1$ , supposons le vrai au rang  $n \geq 1$  et supposons que  $f$  est  $\mathcal{C}^{n+1}$ , par hypothèse de récurrence  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , mais alors  $f' \circ f^{-1}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  qui ne s'annule pas, donc son inverse est de classe  $\mathcal{C}^n$ , i.e.  $(f^{-1})'$  est  $\mathcal{C}^n$ , ce qui signifie que  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $J$ .  $\square$

**Exemples :**

- Les fonctions arcsin et arccos sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1; 1[$ .
- La fonction arctan est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

## IV EXTENSION AUX FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

### 1) Définition

On adopte la même définition que dans le cas réel :

**Définition 13.5**

On dira que  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable en  $t_0 \in I$  si et seulement si la fonction  $t \mapsto \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$  définie sur  $I \setminus \{t_0\}$ , admet une limite finie (dans  $\mathbb{C}$ ) en  $t_0$ . Si celle-ci existe, elle est notée  $f'(t_0)$ . L'ensemble des fonctions dérivables sur  $I$  est noté  $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ .

### 2) Propriétés

**Théorème 13.17 (caractérisation)**

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction, soit  $u = \text{Re}(f)$  et  $v = \text{Im}(f)$ , alors  $f$  est dérivable en  $t_0 \in I$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont dérivables en  $t_0$ . Si tel est le cas, alors  $f'(t_0) = u'(t_0) + i v'(t_0)$ .

**Preuve :** Il suffit d'écrire que :

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} + i \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

avec  $u = \text{Re}(f)$  et  $v = \text{Im}(f)$ .  $\square$

**À retenir**

Il découle de ce théorème, que lorsque  $f$  est dérivable sur  $I$ , on a :  $\text{Re}(f') = \text{Re}(f)'$  et  $\text{Im}(f') = \text{Im}(f)'$ .

Comme la caractérisation nous ramène aux fonctions à valeurs réelles, on peut déduire les propriétés des fonctions dérivables à valeurs complexes :

- On retrouve les mêmes théorèmes généraux, à savoir :
  - Toute fonction  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  dérivable est continue (réciproque fausse).
  - Si  $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$  sont dérivables, alors  $f + g, f \times g$  et  $\lambda f$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ) sont dérivables avec les formules :  $(f + g)' = f' + g', (f \times g)' = f' \times g + f \times g', (\lambda f)' = \lambda f'$ .
  - Si  $g: I \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable et ne s'annule pas, alors  $\frac{1}{g}$  est dérivable sur  $I$  et  $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$ . On en déduit que si  $f$  est également dérivable sur  $I$  alors  $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$ .
  - Si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: J \rightarrow \mathbb{C}$  sont dérivables avec  $\text{Im}(f) \subset J$ , alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et  $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$ .
  - Si  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  est dérivable alors  $\exp(f)$  est dérivable sur  $I$  et  $[\exp(f)]' = f' \times \exp(f)$ .
- Cependant, le théorème de Rolle n'est plus valable, par exemple la fonction  $f(t) = \exp(it)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(t) = i \exp(it)$ , on a  $f(0) = f(2\pi)$  mais  $f'$  ne s'annule pas. Par conséquent l'égalité des accroissements finis n'est plus valable non plus, mais on conserve les inégalités.

**Théorème 13.18 (inégalité des accroissements finis généralisée)**

Si  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , et si  $\forall t \in I, |f'(t)| \leq g'(t)$  où  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , alors :

$$\forall a, b \in I, |f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|.$$

**Remarque 13.12 –**

– Si  $\forall t \in I, |f'(t)| \leq M$ , alors en prenant la fonction  $g(t) = Mt$ , et en appliquant le théorème ci-dessus, on obtient  $\forall a, b \in I, |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$ .

☛ **Exemple :** Avec  $f(t) = \exp(\alpha t)$  où  $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq 0$ , on a  $|f'(t)| = |\alpha| \exp(\operatorname{Re}(\alpha t)) = g'(t)$ , par conséquent :

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, |\exp(\alpha t) - \exp(\alpha t')| \leq \frac{|\alpha|}{|a|} |\exp(at) - \exp(at')|.$$

**3) Classe d'une fonction**

On donne la même définition avec les mêmes notations que pour les fonctions à valeurs réelles, à savoir :  $f: I \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  ssi  $f$  est  $n$  fois dérivable et  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ , ce qui revient à dire que les parties réelle et imaginaire de  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$ . L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  est noté  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ , et on pose  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$  : ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On retrouve les mêmes théorèmes généraux :  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre ( $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ). La formule de Leibniz reste valable, et la composée de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  est également de classe  $\mathcal{C}^n$ .

★ **Exercice 13.7** Soit  $f(t) = \cos(t) \exp(t\sqrt{3})$ , calculer  $f^{(n)}(t)$ .

**V SOLUTION DES EXERCICES**

**Solution 13.1**

1/ Les théorèmes généraux s'appliquent sur  $\mathbb{R}^*$ . Le taux d'accroissement en 0 s'écrit  $x \sin(\frac{1}{x})$  qui tend vers 0 en 0, donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

2/ Pour  $x \neq 0, f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ , or si on pose  $u_n = \frac{1}{nn}$ , alors  $u_n \rightarrow 0$  et  $\cos(\frac{1}{u_n}) = (-1)^n$  n'a pas de limite. Donc la fonction  $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$  n'a pas de limite en 0, et comme la fonction  $x \mapsto 2x \sin(\frac{1}{x})$  tend vers 0 en 0, cela entraîne que  $f'(x)$  ne peut pas avoir de limite en 0.

**Solution 13.2** Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction  $f$  entre deux racines consécutives. On montre ainsi qu'entre deux racines de  $f$  il y a toujours une racine de  $f'$ .

**Solution 13.3**

1/ On montre que la fonction  $g: x \mapsto f(x) - x$  s'annule en un point  $\ell$  car elle est continue et change de signe puisque  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . Si  $\ell$  et  $\ell'$  sont deux points de  $f$  dans  $[a; b]$ , alors en appliquant l'inégalité des AF, on  $|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'|$ , or  $k < 1$ , ce qui entraîne  $|\ell - \ell'| = 0$  et donc  $\ell = \ell'$ .

2/ Par récurrence tous les termes  $u_n$  existent dans  $[a; b]$ . On a alors (IAF)  $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$ , on en déduit par récurrence que  $|u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell|$ , or  $k^n \rightarrow 0$  car  $|k| < 1$ , et donc  $u_n \rightarrow \ell$  (c'est le théorème du point fixe).

**Solution 13.4**

**Solution 13.5** On vérifie que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec  $f'(x) = 3x^2$  si  $x > 0, f'(x) = -3x^2$  si  $x < 0$  et  $f'(0) = 0$ . On peut écrire  $f'(x) = 3x|x|$  pour tout  $x$ , et donc  $f'$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  est donc au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

De même, on vérifie que  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec  $f''(x) = 6x$  si  $x > 0, f''(x) = -6x$  si  $x < 0$  et  $f''(0) = 0$ . On peut écrire  $f''(x) = 6|x|$  pour tout  $x$ , et donc  $f''$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f'$  est donc au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire  $f$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

Par contre, on peut vérifier que  $f''$  n'est pas dérivable en 0, et donc  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution 13.6** On a  $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2k}$  (Newton) et donc  $f^{(n)}(x) = \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2k-n)!} x^{2k-n}$  et donc  $f^{(n)}(0) = 0$  si  $n$  est impair, et  $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} n!$ .

On a  $f(x) = (1-x)^n \times (1+x)^n$ , et donc  $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (1-x)^{n-k} \frac{n!}{k!} (1+x)^k$  (Leibniz), d'où  $f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k (1-x)^{n-k} (1+x)^k$  et donc  $f^{(n)}(0) = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k$ . En égalant les deux résultats, on en déduit que :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k = (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}}$  si  $n$  est pair, et 0 sinon.

**Solution 13.7** On a  $f(t) = \operatorname{Re}(g(t))$  avec  $g(t) = \exp(t(i + \sqrt{3})) = \exp(\alpha t)$  en posant  $\alpha = \sqrt{3} + i = 2 \exp(i \frac{\pi}{6})$ . On a donc  $g^{(n)}(t) = \alpha^n \exp(\alpha t)$  et  $f(t) = \operatorname{Re}(\alpha^n \exp(\alpha t)) = 2^n \cos(t + n \frac{\pi}{6}) \exp(t\sqrt{3})$ .