حـــــل التماريـــن النشـــر و التعميـــل

حل التمرين الأول:

1) نبدأ بالمتساوية الثانية لنجد الأولى :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2)-n}{n\,(n+2)} = \frac{2}{n\,(n+2)}$$

2) لاحظ أننا إدا عوضنا $n = 1$ نجد : $\frac{1}{1\times3}$

و ب $n = 2$ نجد $\frac{1}{2\times4}$

بذلك نطبق متساوية السؤال (1) لجميع حدودA

نجد:

$$\frac{1}{1\times3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2\times4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{3\times5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{98\times100} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right)$$

بجمع كل المتساويات طرفا بطرف:

$$A = \frac{1}{1\times3} + \frac{1}{2\times4} + \frac{1}{3\times5} + \ldots + \frac{1}{98\times100}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right)\right]$$

بعد الإختزال نجد

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{100}\right)$$

حل التمرين الثاني :

-1

-a

$$S - \frac{x}{2}S = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} - \frac{x^5}{32}$$

بعد الإختزال نجد

$$= 1 - \frac{x^5}{32}$$

b– نعمل ب S في المتساوية

$$S - \frac{x}{2}S = 1 - \frac{x^5}{32}$$

$$S\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{x^5}{32}$$

$$S = \frac{1 - \frac{x^5}{32}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{\frac{32-x^5}{32}}{\frac{2-x}{2}}$$

$$= \frac{32 - x^5}{32} \times \frac{2}{2 - x}$$

$$S = \frac{32 - x^5}{16(2 - x)}$$

2- بتعويض x ب 1 في المتساوية S

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

و بتعوبض في b نجد <=

$$S = \frac{32 - 1^5}{16(2-1)} = \frac{31}{16}$$

حل التمرين الثالث:

1- لنبين أن $\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

نبدأ بالحد الثاني في المتساوية و ننشر :

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

2- حل المعادلة $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

الفكرة هي تطبيق نتيجة السؤال 1

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^3 = x^2 + x + 2$$

نضيف (1-) في المتساوية $x^3 - 1 = x^2 + x + 2 - 1$

حسب السؤال 1

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

إذن بالتعويض

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^2 + x + 1$$

بما أن $x \geq 0$ فإن $x^2 + x + 1 > 0$ إذن نختزل :

يبقى $x - 1 = 0$

إذن $x = 1$

و بالتالي $S = \{1\}$

حل التمرين الرابع :

لكي نحسب $\frac{a}{b}$ يجب أن نبحث عن علاقة بين a و b على شكل $a = \alpha b$

إذن انطلاقا من المتساوية $\frac{3a + 2b}{5a - b} = \frac{4}{3}$

$$3(3a + 2b) = 4(5a - b)$$

$$9a + 36b = 20a - 4b$$

$$9a - 20a = -36b - 4b$$

$$-11a = -40b$$

$$a = \frac{-40}{-11} b = \frac{40}{11} b$$

وبالتالي $\frac{a}{b} = \frac{40}{11}$

حل التمرين الخامس:

لدينا $2x - 5y = 0$

إذن $2x = 5y$

يعني $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$ (1)

من جهة أخرى $\frac{z}{y} = -1.5 = \frac{-3}{2}$

لاحـــــــــظ أن

$$\begin{cases} 1.5 = \frac{3}{2} \\ 0.5 = \frac{1}{2} \\ 2.5 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

يعني بتبديل أطراف المتساوية

$\frac{z}{3} = -\frac{y}{2}$

(2) $-\frac{z}{3} = \frac{y}{2}$

حسب(1) و (2) نجد $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{-z}{3}$

2- لدينا $\frac{x}{5} = \frac{-z}{3}$

إذن $x = \frac{-5z}{3}$

و بتعويض في المتساوية $x \; 2z = 33$ نجد :

$-\frac{5}{3}z - 2z = 33$

$(-\frac{5}{3} - 2)\, z = 33$

$(\frac{-5-6}{3})\, z = 33$

$-\frac{11}{3}z = 33$

إذن $z = \frac{-3}{11}.33 = -9$

لدينا $x = \frac{-5z}{3} = \frac{-5}{3} \times -9 = 15$

ثم $\frac{y}{2} = \frac{x}{5}$

$=> \ y \frac{2}{5}x = \frac{2}{5} \times 15 = 6$

إذن $z = -9$ و $y = 6$ ، $x = 15$

حل التمرين السادس :

لدينا $a^2 + b^2 = 2$

للحصول على $a^4 + b^4$ يجب رفع الأس في المتساوية إلى

إذن $(a^2 + b^2) = 2^2 = 4$

يعني $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 4$

$$(1) \qquad a^4 + b^4 = 4 - 2\,a^2b^2$$

من جهة أخرى : $a + b = 1$

نرفع الأس <= $(a + b)^2 = 1^2 = 1$

$a^2 + 2ab + b^2 = 1$

$(a^2 + b^2) + 2\,ab = 1$

$2 + 2ab = 1$

يعني $2ab = -1$

$=> \ ab = -\frac{1}{2}$

إذن $a^2b^2 = (ab)^2 = \frac{1}{4}$

نعوض في(1) $a^4 + b^4 = 4 - 2.\frac{1}{4}$

$$a^4 + b^4 \ = \ 2$$

حل التمرين السابع :

1- ننشر $P = 2(x+1)\ (x+2) = 2(x^2 + 2x + x + 2)$

$= 2(x^2 + 3x + 2)$

$= 2x^2 + 6x + 4$

2- باستعمال (1) لدينا

$P = (x+1)^2 + (x + 2)^2 + 2\,(x + 1)\,(x + 2)$

$= [(x + 1) + (x + 2)]^2 = (2x + 3)^2$

3- حل المعادلة $A = 9$

$(2x + 3)^2 = 9$

$(2x + 3)^2 - 9 = 0$

$[(2x + 3) - 3][(2x + 3) + 3] = 0$

$2x\,(2x + 6) = 0$

يعني $2x = 0$ أو $2x + 6 = 0$

يعني $x = 0$ أو $x = -3$

إذن $S = \{-3 , 0 \}$