الدرس ① : الجذر المربع

I - الجذر المربع لعدد حقيقي موجب :

1) نشاط ① :

1) باستعمال الآلة الحاسبة، أتمم ملأ الجدول أسفله

$\frac{81}{49}$	0,64	1,44	1	0	x
$\frac{9}{7}$	$\frac{4}{5}=0,8$	12	1	0	$\sqrt{x}$

2) أتمم الفراغ بالعدد الحقيقي المناسب.

* $(3)^2=9$ * $(\sqrt{7})^2=7$ * $\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$
* $(\sqrt{5})^2=5$ * $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$ * $\left(\frac{-1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$

2) تعريف :

a عدد حقيقي موجب

الجذر المربع للعدد a هو العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a ويكتب $\sqrt{a}$

نتيجة : لكل عدد حقيقي موجب.

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2=a} \quad , \quad \boxed{\sqrt{a^2}=a}$$

3) أمثلة :

* $\sqrt{0}=0$ لأن $0^2=0$
* $\sqrt{1}=1$ لأن $1^2=1$
* $\sqrt{9}=3$ لأن : $3^2=9$
* $\sqrt{49}=7$ لأن $7^2=49$
* $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ لأن : $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

* ملاحظة هامة : $\sqrt{a}$ لا معنى له فقط إذا كان $a\geq 0$

أمثلة للحفظ :

* $\sqrt{0}=0$ * $\sqrt{1}=1$ * $\sqrt{4}=2$
* $\sqrt{9}=3$ * $\sqrt{16}=4$ * $\sqrt{25}=5$
* $\sqrt{49}=7$ * $\sqrt{64}=8$ * $\sqrt{81}=9$
* $\sqrt{100}=10$ * $\sqrt{121}=11$ * $\sqrt{144}=12$
* $\sqrt{169}=13$ * $\sqrt{196}=14$ * $\sqrt{225}=15$
* $\sqrt{256}=16$ * $\sqrt{289}=17$ * $\sqrt{324}=18$
* $\sqrt{361}=19$ * $\sqrt{400}=20$

4) تمرين تطبيقي : تمرين 38 ص 95

* $\sqrt{121}=\sqrt{11^2}=11$
* $\sqrt{10000}=\sqrt{100^2}=100$
* $\sqrt{6400}=\sqrt{64\times 100}=\sqrt{8^2\times 10^2}=\sqrt{(8\times 10)^2}=80$
* $\sqrt{0,36}=\sqrt{\frac{36}{100}}=\sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$
* $\sqrt{\frac{49}{25}}=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}$
* $\sqrt{\frac{9}{100}}=\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2}=\frac{3}{10}$

3) مربع جذر مربع عدد حقيقي :

أ- خاصية :

a عدد حقيقي :

1/ إذا كان $a\geq 0$ فإن : $\sqrt{a^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2=a$

2/ إذا كان $a\leq 0$ فإن : $\sqrt{a^2}=\left(\sqrt{-a}\right)^2=-a$

ب- أمثلة :

* $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$ * $\sqrt{\frac{11}{5}^2}=\frac{11}{5}$ * $\sqrt{(-3)^2}=3$
* $\sqrt{\sqrt{9}^2}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$ * $\sqrt{(-7)^2}=7$

ج- تمرين تطبيقي :

بسط ما يلي :

* $\sqrt{\sqrt{16}}$ * $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}$
* $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}^2}$ * $\sqrt{\sqrt{5}^2}^2$
* $\sqrt{7+\sqrt{2}^2}$ * $\sqrt{(-7-\sqrt{5})^2}$

الحل :

* $\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{\sqrt{4^2}}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$
* $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}$
* $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}^2}=\frac{\sqrt{2}}{7}$
* $\sqrt{\sqrt{5}^2}^2=\sqrt{5}^2=5$
* $\sqrt{7+\sqrt{2}^2}=\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$
* $\sqrt{(-7-\sqrt{5})^2}=-(-7-\sqrt{5})=7+\sqrt{5}$

II - حل المعادلة $x^2=a$

1) إذا كان $a>0$

المعادلة $x^2=a$ تكافئ على التوالي

$x^2-a=0$

$x^2-\sqrt{a}^2=0$

$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$

$x-\sqrt{a}=0$ أو $x+\sqrt{a}=0$

$x=\sqrt{a}$ أو $x=-\sqrt{a}$

2) إذا كان $a=0$

المعادلة $x^2=a$ تكافئ على التوالي

$x^2=0$

$x=0$

المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 0

3) إذا كان $a<0$

المعادلة $x^2=a$ ليس لها حل

خلاصة:

حلول المعادلة $x^2=a$		
* إذا كان $a=0$	فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $x=0$	
* إذا كان $a>0$	فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$	
* إذا كان $a<0$	فإن المعادلة ليس لها حل.	

* تمرين تطبيقي:

حل المعادلات التالية:

* $-13+x^2=-4$
* $2x^2=6$
* $2(x^2-1)=-2$
* $3x^2+15=3$

* الحل:

المعادلة $2x^2=6$ تكافئ على التوالي

$x^2=\frac{6}{2}$

$x^2=3$

$x=-\sqrt{3}$ أو $x=\sqrt{3}$

إذن حلا هذه المعادلة هما $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

* المعادلة $-13+x^2=-4$ تكافئ على التوالي

$x^2=-4+13$

$x^2=9$

$x=-\sqrt{9}=-3$ أو $x=\sqrt{9}=3$

إذن حلا هذه المعادلة هما العددان 3 و -3

* المعادلة $2(x^2-1)=-2$ تكافئ على التوالي

$2x^2-2=-2$

$2x^2=-2+2$

$2x^2=0$

$x^2=0$

$x=0$

إذن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو العدد 0

* المعادلة $3x^2+15=3$ تكافئ على التوالي

$3x^2=3-15$

$3x^2=-12$

$x^2=-\frac{12}{3}$

$x^2=-4$

إذن هذه المعادلة ليس لها حل.

III - العمليات على الجذور التربيعية:

1) الجذر التربيعي لجداء عددين موجبين

أ - خاصية ①:

a و b عددان حقيقيان موجبان لدينا: $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

* أمثلة:

* $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times 6}=\sqrt{12}$
* $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}=6$
* $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{2\times 3\times 5}=\sqrt{30}$
* $\sqrt{125}=\sqrt{25\times 5}=\sqrt{25}\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

ب - خاصية ②:

a و b عددان حقيقيان موجبان لدينا:

$\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$

* أمثلة:

* $\sqrt{3^2\times 11}=3\sqrt{11}$
* $\sqrt{25\times 7}=\sqrt{5^2\times 7}=5\sqrt{7}$
* $\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$
* $\sqrt{3^2\times 7}\times\sqrt{2^2\times 3}=3\sqrt{7}\times 2\sqrt{3}=3\times 2\sqrt{7\times 3}=6\sqrt{21}$

* تقنيات وعبارات:

① التفكيك:

لتبسيط $\sqrt{180}$ ، من أجل ذلك نفكك 180 إلى جداء عوامل أولية

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

إذن: $180=2^2\times 3^2\times 5$

وهنا نجد: $\sqrt{180}=\sqrt{2^2\times 3^2\times 5}=2\times 3\times\sqrt{5}$

وبالتالي فإن: $\boxed{\sqrt{180}=6\sqrt{5}}$

② الحصر التربيعي والحوكمة:

لتبسيط العددين $A=\sqrt{5^6}$ و $B=\sqrt{7^5}$

$A=\sqrt{5^6}=\sqrt{5^3}^2=5^3=125$

$B=\sqrt{7^5}=\sqrt{7^4\times 7}=\sqrt{7^2}^2\times 7=7^2\times\sqrt{7}=49\sqrt{7}$

* أمثلة:

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{3}$

ب- خاصية ②:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا و b عددا حقيقيا موجبا قطعا

$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$ ، $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

* أمثلة:

$\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$

$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

3) إزالة الجذر المربع في المقام:

أ- الحالة ①: المقام يحتوي على جذر تربيعي واحد فقط

$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{5\times 2} = \frac{\sqrt{6}}{10}$

$\frac{2+\sqrt{7}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}(2+\sqrt{7})}{3\times 11} = \frac{2\sqrt{11}+\sqrt{77}}{33}$

ب- الحالة ②: المقام يحتوي على مجموع أو فرق

* تعريف: المرافق

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا.

مرافق $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ هو $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

ومرافق $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ هو $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

أو نقول أن العددين $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ مترافقان

ولدينا: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a-b$

* أمثلة:

$\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$

$= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\sqrt{2}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5}$

$= \frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{-3}$

$= -(\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$= \sqrt{5}-\sqrt{2}$

③ تمرين تطبيقي:

بسط و احسب ما يلي:

$a = \sqrt{\sqrt{3^4\times 5^2\times 2^7}}$

$b = \sqrt{2^2+3^2+6^2}$

$c = (3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$d = \sqrt{25}+\sqrt{81}-2\sqrt{9}$

$e = \sqrt{96}+2\sqrt{24}-3\sqrt{54}$

* الحل:

$a = \sqrt{\sqrt{3^4\times 5^2\times 2^7}}$

$= \sqrt{\sqrt{3^2{}^2\times 5^2\times 2^6\times 2}}$

$= \sqrt{3^2\times 5^2\times (2^3)^2\times 2}$

$= 3\times 5\times 2^3\times\sqrt{2}$

$\boxed{a = 120\sqrt{2}}$

$b = \sqrt{2^2+3^2+6^2}$

$= \sqrt{4+9+36}$

$= \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

$c = (3\sqrt{2}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}-\sqrt{5})$

$= (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2$

$= 9\times 2 - 5 = 18-5$

$\boxed{c = 13}$

$d = \sqrt{25}+\sqrt{81}-2\sqrt{9}$

$= \sqrt{5^2}+\sqrt{9^2}-2\sqrt{3^2}$

$= 5+9-2\times 3$

$= 14-6$ $\boxed{d = 8}$

$e = \sqrt{96}+2\sqrt{24}-3\sqrt{54}$

$= \sqrt{16\times 6}+2\sqrt{4\times 6}-3\sqrt{9\times 6}$

$= \sqrt{4^2\times 6}+2\sqrt{2^2\times 6}-3\sqrt{3^2\times 6}$

$= 4\sqrt{6}+2\times 2\sqrt{6}-3\times 3\sqrt{6}$

$= 4\sqrt{6}+4\sqrt{6}-9\sqrt{6}$

$= (4+4-9)\sqrt{6}$ $\boxed{e = -\sqrt{6}}$

② الجذر المربع والقسمة:

أ- خاصية ①:

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين و $b\neq 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$