

- مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا
- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
  - شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

**مذكرة رقم 1 في درس المتتاليات الترجعية**

مذكرة رقم : 1  
الأستاذ : عثمانى نجيب

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
<p>- نقبل أن المتتاليات <math>(n)_{n \geq 0}</math> و <math>(n^2)_{n \geq 0}</math> و <math>(n^3)_{n \geq 0}</math> و <math>(\sqrt{n})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^2})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^3})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^p})_{n \geq 0}</math> حيث <math>p</math> عدد صحيح طبيعي أكبر من 3 تؤول إلى <math>+\infty</math> عندما يؤول <math>n</math> إلى <math>+\infty</math> وأن المتتاليات <math>(\frac{1}{n})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^2})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^3})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^p})_{n \geq 0}</math> حيث <math>p</math> عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، تؤول إلى 0 عندما يؤول <math>n</math> إلى <math>+\infty</math> اعتبارا لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية؛</p> <p>- جميع النهايات الواردة في محتوى البرنامج تعتبر نهايات مرجعية؛</p> <p>- تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛</p> <p>- إن أي دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج</p>	<p>- استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: <math>u_{n+1} = au_n + b</math></p> <p>- استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهايات متتاليات عددية؛</p>	<p>- المتتاليات من الشكل: <math>u_{n+1} = au_n + b</math> وتمثيلها مبيانيا؛</p> <p>- نهايات المتتاليات المرجعية: <math>(n)_{n \geq 0}</math> و <math>(n^2)_{n \geq 0}</math> و <math>(n^3)_{n \geq 0}</math> و <math>(\sqrt{n})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^2})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^3})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^p})_{n \geq 0}</math> حيث <math>p</math> عدد صحيح طبيعي أكبر من 3،</p> <p>- نهايات المتتاليات المرجعية: <math>(\frac{1}{n})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^2})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^3})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 0}</math> و <math>(\frac{1}{n^p})_{n \geq 0}</math> حيث <math>p</math> عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛</p> <p>- نهاية متتالية هندسية <math>(a^n)</math> حيث <math>a \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>- العمليات على النهايات؛</p>

**1. المتتاليات الحسابية: تذكير**

**نشاط:** لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

(1) 0, 2, 4, 6, 8, 10, .....

(2) 6, 3, 0, -3, -6, -9, -12, .....

(3) 1, 3, 9, 27, 81, 243, .....

(4) 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$ , .....

(5) 1, 4, 9, 16, 25, 36, .....

**مثال 1:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة الصريحة التالية:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n - 1$

• أحسب حدها الأول  $u_0$

• أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$

• أحسب  $u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

الجواب:  $u_0 = 2 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$

$u_1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$u_2 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$u_3 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$

نلاحظ أن فرق حدين متتالين هو العدد 2

$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) - 1) - (2n - 1) = (2n + 2 - 1) - (2n - 1)$

اذن:  $u_{n+1} - u_n = 2 = r = (2n + 2 - 1) - (2n - 1) = (2n + 1) - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1$

ومنه المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  هي حسابية أساسها:  $r = 2$

**1. تعريف:** نقول إن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي  $r$  بحيث:  $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$

العدد الحقيقي  $r$  يسمى أساس المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$

**تمرين 1:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n + 3$

1. أحسب :  $u_{n+1} - u_n$

2. ماذا تستنتج ؟

الجواب :

$$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) + 3) - (2n + 3) = (2n + 2 + 3) - (2n + 3) \\ = (2n + 2 + 3) - (2n + 3) = (2n + 5) - (2n + 3) = 2n + 5 - 2n - 3$$

اذن :  $u_{n+1} - u_n = 2 = r$

ومنه المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هي حسابية أساسها :  $r = 2$

**2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة  $n$  :**

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_0$  فان :  $u_n = u_0 + (n-0)r$

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_1$  فان :  $u_n = u_1 + (n-1)r$

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_2$  فان :  $u_n = u_2 + (n-2)r$

**3. مجموع حدود متتالية حسابية :**

لتكن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية حسابية

نضع  $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$  حيث  $n > p \geq n_0$

لدينا  $S_n = (n - p + 1) \left( \frac{u_n + u_p}{2} \right)$

المجموع  $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$  يحتوي على  $(n - p + 1)$  حد

**مثال :**

1. لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي :  $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$

2. لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -2$  وحدها الأول  $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي :  $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25}$

(الجواب : 1)  $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = (30 - 3 + 1) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$

$$S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2}$$

وبما أن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $u_0 = 1$  فان :  $u_n = u_0 + (n-0)r$

أي :  $u_n = 1 + \frac{n}{2}$  أي :  $u_n = 1 + (n-0) \frac{1}{2}$

ومنه نحسب :  $u_{30} = 1 + \frac{30}{2} = \frac{32}{2} = 16$  و :  $u_3 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

وبالتالي :  $S_1 = (28) \frac{u_3 + u_{30}}{2} = 14 \left( \frac{5}{2} + 16 \right) = 14 \left( \frac{37}{2} \right) = 7 \times 37 = 259$

(2)  $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \dots + u_{25} = (25 - 7 + 1) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2}$

وبما أن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = -2$  وحدها الأول  $u_0 = 4$  فان :  $u_n = u_0 + (n-0)r$

أي :  $u_n = 4 - 2n$  أي :  $u_n = 4 + (n-0)(-2)$

ومنه نحسب :  $u_{25} = 4 - 2 \times 25 = 4 - 50 = -46$  و :  $u_7 = 4 - 2 \times 7 = 4 - 14 = -10$

وبالتالي :  $S_2 = (19) \frac{u_7 + u_{25}}{2} = (19) \frac{-10 + (-46)}{2} = (19) \frac{-56}{2} = 19 \times -28 = -532$

**تمرين 2:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة التالية :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3n + 1$

1. تحقق أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  حسابية

2. أحسب المجموع :  $S_6 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_6$

(الجواب : 1)

$$u_{n+1} - u_n = (3(n+1) + 1) - (3n + 1) = (3n + 3 + 1) - (3n + 1) = 3$$

اذن :  $u_{n+1} - u_n = 3 = r$  ومنه  $(u_n)_{n \geq 0}$  حسابية

$$S_6 = u_1 + u_2 + \dots + u_6 = (6-1+1) \frac{u_1 + u_6}{2} \quad (2)$$

$$S_6 = (6) \frac{u_1 + u_6}{2} = 3(u_1 + u_6)$$

وبما أن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 3$  وحدها الأول  $u_0 = 1$  فان  $u_n = u_0 + (n-0)r$

$$\text{أي: } u_n = 1 + 3n$$

$$\text{ومنه نحسب: } u_1 = 1 + 3 \times 1 = 4 \text{ و } u_6 = 1 + 3 \times 6 = 19$$

$$\text{وبالتالي: } S_6 = 3(4 + 19) = 3 \times 23 = 69$$

**تمرين 3:** نعتبر متتالية حسابية  $(u_n)_{n \geq 0}$  أساسها  $r = 2$  وحدها الأول  $u_0 = 3$

$$1. \text{ أحسب } u_1 \text{ و } u_2 \text{ و } u_3$$

$$2. \text{ أكتب } u_n \text{ بدلالة } n$$

$$3. \text{ أحسب المجموع: } S_6 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$$

$$\text{الجواب (1): } u_1 = u_0 + r = 3 + 2 = 5$$

$$u_2 = u_1 + r = 5 + 2 = 7$$

$$u_3 = u_2 + r = 7 + 2 = 9$$

(2) وبما أن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = 2$  وحدها الأول  $u_0 = 3$  فان  $u_n = u_0 + (n-0)r$

$$\text{أي: } u_n = 3 + 2(n-0) = 2n + 3$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} = (10-0+1) \frac{u_0 + u_{10}}{2} \quad (3)$$

$$S_6 = 11 \frac{u_0 + u_{10}}{2} = \frac{11}{2}(3 + u_{10})$$

$$\text{ومنه نحسب: } u_{10} = 2 \times 10 + 3 = 23$$

$$\text{وبالتالي: } S = \frac{11}{2}(3 + 23) = \frac{11}{2} \times 26 = 11 \times 13 = 143$$

## II. المتتاليات الهندسية

1. **تعريف:** نقول إن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي  $q$  بحيث  $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$

العدد الحقيقي  $q$  يسمى أساس المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$

**مثال:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة الصريحة التالية:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n$

$$1. \text{ أحسب حدها الأول } u_0$$

$$2. \text{ أحسب } \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ ماذا نستنتج؟}$$

(الجواب: 1)

$$u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3^1}{3^n} = 3^1 = 3 = q \quad (2)$$

اذن: المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  هندسية أساسها  $q = 3$  وحدها الأول  $u_0 = 2$

**تمرين 4:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول

$$\text{الجواب (1): } u_0 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 3 \times 1 = 3$$

$$\text{اذن: المتتالية } (u_n)_{n \geq 0} \text{ هندسية أساسها } q = \frac{2}{5} \text{ وحدها الأول } u_0 = 3 \quad (2)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{2}{5}\right)^1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2}{5} = q$$

## 2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم وحدها الأول  $u_0$  فان :  $u_n = u_0 q^{n-0}$

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم وحدها الأول  $u_1$  فان :  $u_n = u_1 q^{n-1}$

**نتيجة :** إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم فان :  $u_n = u_m q^{n-m}$  لكل  $n \geq n_0$  و  $m \geq n_0$

**مثال:** نعتبر المتتالية الهندسية  $(u_n)$  بحيث حدها الأول  $u_0 = 81$  وأساسها :  $q = \frac{1}{3}$

1. أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$

2. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$

3. حدد العدد الصحيح الطبيعي  $n$  بحيث  $u_n = 1$

(الأجوبة : 1) نعم أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$  وحدها الأول  $u_0 = 81$

اذن :  $u_n = u_0 q^{n-0}$  ومنه :  $u_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$u_3 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3 \text{ و } u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27 \quad (2)$$

$$u_n = 1 \text{ يعني } 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 \text{ يعني } 81 \times \frac{1}{3^n} = 1 \text{ يعني } \frac{81}{3^n} = 1 \text{ يعني } 81 = 3^n \text{ يعني } n = 4 \quad (3)$$

**تمرين 5:** نعتبر المتتالية الهندسية  $(u_n)$  بحيث حدها الأول  $u_0 = 5$  و  $u_3 = 40$

1. تحقق أن أساس المتتالية  $(u_n)$  هو  $q = 2$

2. أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$

3. أحسب  $u_4$

4. حدد العدد الصحيح الطبيعي  $n$  بحيث  $u_n = 160$

(الأجوبة : 1) نعم أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية هندسية اذن :

اذن :  $u_3 = u_0 q^{3-0}$  يعني :  $40 = 5q^3$  يعني :  $q^3 = \frac{40}{5}$  يعني :  $q^3 = 8$  يعني :  $q = 2$

$$u_n = 5 \times (2)^n \quad (2)$$

$$u_4 = 5 \times (2)^4 = 5 \times 16 = 80 \text{ و } u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27 \quad (3)$$

$$u_5 = 2 \times u_4 = 2 \times 80 = 160 \text{ و } u_2 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9 \text{ و } u_1 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{81}{3} = 27 \quad (4)$$

ومنه :  $n = 5$

## 3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  غير منعدم نضع  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

إذا كان  $q \neq 1$  فان :  $S_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

**تمرين 6:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بالصيغة التالية :  $u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = 3 \times u_n$   $\forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن  $(u_n)_{n \geq 0}$  هندسية

2. عبر عن  $U_n$  بدلالة  $n$

3. أحسب المجموع :  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5$

(الجواب : 1)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times u_n}{u_n} = 3 = q$$

اذن : المتتالية هندسية أساسها  $q = 3$  وحدها الأول  $u_0 = 3$

(2)  $(u_n)_{n \geq 0}$  هندسية أساسها  $q = 3$  وحدها الأول  $u_0 = 3$

اذن:  $u_n = u_0 q^{n-0} = 3 \times (3)^n = 3^1 \times (3)^n = (3)^{n+1}$  أي:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_5 = u_1 \times \frac{1-q^{5+1}}{1-q} = u_1 \times \frac{1-q^6}{1-q} \quad (3)$$

نحسب:  $u_1$

$$u_1 = 3^{1+1} = 3^2 = 9$$

$$S_n = 9 \times \frac{1-3^6}{1-3} = 9 \times \frac{1-243}{-2} = 9 \times \frac{-242}{-2} = 9 \times 121 = 1029$$

**III. المتتاليات من صنف**  $U_{n+1} = aU_n + b$

**مثال 1:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بالعلاقة الترجيعية التالية:  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(u_n)$

الجواب: نعوض  $n$  ب 0 فنجد:  $u_{0+1} = 2 \times u_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$

اذن:  $u_1 = 5$

نعوض  $n$  ب 1 فنجد:  $u_{1+1} = 2 \times u_1 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$

اذن:  $u_2 = 13$

نعوض  $n$  ب 2 فنجد:  $u_{2+1} = 2 \times u_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 26 + 3 = 29$

اذن:  $u_3 = 29$

**ملاحظة:** هذه المتتالية تسمى متتالية ترجيعية

**مثال 2:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:  $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 2$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. أحسب  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  واستنتج طبيعة المتتالية  $(v_n)$

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$

4. استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

الجواب (1): نعوض  $n$  ب 0 فنجد:  $u_{0+1} = 2 \times u_0 + 2 = 2 \times 2 + 2 = 4 + 2 = 6$

اذن:  $u_1 = 6$

نعوض  $n$  ب 1 فنجد:  $u_{1+1} = 2 \times u_1 + 2 = 2 \times 6 + 2 = 12 + 2 = 14$

اذن:  $u_2 = 14$

نعوض  $n$  ب 0 فنجد:  $v_0 = u_0 + 2 = 2 + 2 = 4$

نعوض  $n$  ب 1 فنجد:  $v_1 = u_1 + 2 = 6 + 2 = 8$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2} = \frac{2u_n + 2 + 2}{u_n + 2} = \frac{2u_n + 4}{u_n + 2} = \frac{2(u_n + 2)}{u_n + 2} = 2 = q \quad (2)$$

اذن: المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = 2$  وحدها الأول  $v_0 = 4$

كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$

بما أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = 2$  وحدها الأول  $v_0 = 4$

فان:  $v_n = v_0 \times q^n$  أي:  $v_n = 4 \times 2^n$

4) استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

لدينا:  $v_n = u_n + 2$  اذن:  $v_n - 2 = u_n$

أي:  $u_n = 4 \times 2^n - 2$

**تمرين 7:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

4. أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

(الجواب:1) نعوض بـ 0 فنجد:  $u_{0+1} = \frac{1}{2} \times u_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

اذن :  $u_1 = 1$

نعوض بـ 1 فنجد :  $u_{1+1} = \frac{1}{2} \times u_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  اذن :  $u_2 = 0$

نعوض بـ 0 فنجد :  $v_0 = u_0 + 1 = 3 + 1 = 4$

نعوض بـ 1 فنجد :  $v_1 = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_n + 1} = \frac{\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} + 1}{u_n + 1} = \frac{\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}}{u_n + 1} = \frac{\frac{1}{2}(u_n + 1)}{u_n + 1} = \frac{1}{2} = q \quad (2)$$

اذن: المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = 4$

3) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$

بما أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0 = 4$

فان:  $v_n = v_0 \times q^n$  أي:  $v_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$

لدينا:  $v_n = u_n + 1$  اذن:  $v_n - 1 = u_n$

أي:  $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (4)$$

$$S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 8 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

**تمرين 8:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 2$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{3}{2}$

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

(الجواب:1) نعوض بـ 0 فنجد:

اذن :  $u_1 = -\frac{5}{2}$  اذن :  $u_{0+1} = \frac{3}{2} \times u_0 - 1 = \frac{3}{2} \times (-1) - 1 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{3}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{5}{2}$

نعوض بـ 1 فنجد :

$$u_2 = -\frac{15}{4} : \text{اذن } u_{n+1} = \frac{3}{2} \times u_n - 1 = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = -\frac{15}{4} - 1 = -\frac{15}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{19}{4}$$

$$v_0 = u_0 - 2 = -1 - 2 = -3 : \text{نعوض } n \text{ ب } 0 \text{ فنجد:}$$

$$v_1 = -\frac{5}{2} - 2 = -\frac{5}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} : \text{نعوض } n \text{ ب } 1 \text{ فنجد:}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}u_n - 1 - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}u_n - \frac{6}{2}}{u_n - 2} = \frac{\frac{3}{2}(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{3}{2} = q \quad (2)$$

$$\text{اذن: المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{3}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = 4$$

كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$

$$\text{بما أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{3}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = -3$$

$$\text{فان: } v_n = (-3) \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 2 : \text{اذن } v_n + 2 = u_n : \text{أي: } u_n = -3 \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$

**تمرين 9:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 6$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  و استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

$$\text{الجواب: (1) نعوض } n \text{ ب } 0 \text{ فنجد: } u_{0+1} = \frac{1}{2} \times u_0 - 3 = \frac{1}{2} \times 2 - 3 = 1 - 3 = -2 : \text{اذن } u_1 = -2$$

$$\text{نعوض } n \text{ ب } 1 \text{ فنجد: } u_{1+1} = \frac{1}{2} \times u_1 - 3 = \frac{1}{2} \times (-2) - 3 = -1 - 3 = -4 : \text{اذن } u_2 = -\frac{15}{4}$$

$$\text{نعوض } n \text{ ب } 0 \text{ فنجد: } v_0 = u_0 + 6 = 2 + 6 = 8$$

$$\text{نعوض } n \text{ ب } 1 \text{ فنجد: } v_1 = u_1 + 6 = -2 + 6 = 4$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} + 6}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n - 3 + 6}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2}u_n + \frac{6}{2}}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2}(u_n + 6)}{u_n + 6} = \frac{1}{2} = q \quad (2)$$

$$\text{اذن: المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = 8$$

كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$

$$\text{بما أن المتتالية } (v_n) \text{ هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } v_0 = 8$$

$$\text{فان: } v_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + 6 : \text{اذن } v_n - 6 = u_n : \text{أي: } u_n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$$

**تمرين 10:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة كالتالي :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3$

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_0$  و  $v_1$

2. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$

3. أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

(الجواب: 1) نعوض  $n=0$  فنجد:  $\frac{23}{3} = \frac{20}{3} + 1 = \frac{2}{3} \times 10 + 1 = \frac{2}{3} \times u_0 + 1$  إذن :  $u_1 = \frac{23}{3}$

نعوض  $n=1$  فنجد :  $\frac{55}{9} = \frac{46}{9} + 1 = \frac{46}{9} + \frac{9}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{23}{3} + 1 = \frac{2}{3} \times u_1 + 1$  إذن :  $u_2 = \frac{55}{9}$

نعوض  $n=0$  فنجد :  $v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$

نعوض  $n=1$  فنجد :  $v_1 = u_1 - 3 = \frac{23}{3} - 3 = \frac{23}{3} - \frac{9}{3} = \frac{14}{3}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n + 1 - 3}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n - 2}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}u_n - \frac{6}{3}}{u_n - 3} = \frac{\frac{2}{3}(u_n - 3)}{u_n - 3} = \frac{2}{3} = q \quad (2)$$

إذن: المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3} = q$  وحدها الأول  $v_0 = 7$

3) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$

بما أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3} = q$  وحدها الأول  $v_0 = 7$

فإن:  $v_n = 7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$

لدينا:  $v_n = u_n - 3$  إذن:  $v_n + 3 = u_n$  أي:  $u_n = 7 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$