Groupe Scolaire Tnisse	Contrôle continu 3 (S 1) - 18 Décembre 2019 -	2ème bac : G.C • GE Durée : 2 Heures Prof : G.A

Exercice 1 (6 points)

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par : $U_0 = 7$ et $U_{n+1} = \frac{1}{9}U_n + 8$; $(n \in \mathbb{N})$

0,5 1) a) Calculer U_1 et U_2

1 b) Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n < 9$

1 c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

0,5 d) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \in [7 ; 9]$

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n = U_n - 9$

1,25 a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{9}$ en donnant son premier terme V_0.

1,25 b) Ecrire V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = 9 - 2\times\left(\frac{1}{9}\right)^n$

0,5 c) Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ (justifier votre réponse)

Exercice 2 (8 points)

On Considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1 1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1 b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Déduire la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

1 2) a) Montrer que $(\forall x \in]0 ; +\infty[)$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Déduire que $f'(x) > 0$

1 b) Dresser le tableau de variations de f sur I.

1 c) Ecrire l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

1 3) a) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]\frac{1}{2} ; 1[$.

1 b) Calculer $f((\sqrt{3} - 1)^2)$ puis déduire la valeur exacte de α.

1 c) Construire la courbe (C) $(\alpha \simeq 0,7 ; f(4) = 3)$.

Exercice 3 (6 points)

Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$; $(n \in \mathbb{N})$.

0,5 1) a) Calculer u_1 et u_2.

1 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > 0$

1,25 c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1,25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_{n+1} - v_n = 1$ puis déduire la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ en donnant son premier terme v_0.

1 b) Ecrire v_n en fonction de n puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n = \frac{1}{n+2}$.

0,25 c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

0,75 3) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$