Anisse International School

Contrôle continu 3 (S1)
Mathématiques
15 - 01 - 2022

2ème bac Eco 1+2
Durée : 2 Heures

Exercice 1 (6 points)

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$; $(n \in \mathbb{N})$

0,25 1) a) Calculer u_1

1 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > 1$

1 c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$ puis déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

0,5 d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

1,5 a) Prouver que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique de raison $r = 1$. puis exprimer v_n en fonction de n.

1 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n = 1 + \frac{1}{v_n}$ puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n = \frac{n+4}{n+2}$

0,25 c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

0,5 3) Montrer que $v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{(n+1)(n+4)}{4}$.

Exercice 2 (8,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $I =]-4; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{\sqrt{x+4}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

1 b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

0,5 c) Montrer que (C) est au dessus de (Δ) sur I.

1 2) a) Montrer que : $(\forall x \in I)$ $f'(x) = \frac{(x+4)\sqrt{x+4} - 1}{(x+4)\sqrt{x+4}}$

0,5 b). Calculer $f'(-3)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu

0,5 c) Montrer que si $x > -3$ alors $f'(x) > 0$

1 d) Dresser le tableau de variations de f sur I

1 3) a) Ecrire l'équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1 b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]-3,9\,;-3,8[$.

1 c) Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

Exercice 3 (5,5 points)

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=7$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}=\frac{5}{8}u_n+3$

0,75 1) a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n<8$

0,75 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante

0,5 c) Déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

2) On pose : $v_n=u_n-8$ pour $n\in\mathbb{N}$.

0,5 a) Prouver que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison $q=\frac{5}{8}$

1 b) Exprimer v_n en fonction de n puis déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n=8-\left(\frac{5}{8}\right)^n$.

0,5 c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.

3°) On pose : $S_n=v_0+v_1+\dots+v_n$. $(n\in\mathbb{N})$

1 a) Montrer que : $S_n=-\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}\right)$

0,5 b) Déduire que $(\forall n\in\mathbb{N})\quad S_n>-\frac{8}{3}$