

Exercice 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2 + \sqrt{x^2 + 1}$

0,5 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (justifier votre réponse).

1 b) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[)$ $\frac{f(x)}{x} = x - \frac{2}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (justifier votre réponse).

1 2) a) Montrer que $(\forall x \in I)$ $f'(x) = 2x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

0,5 b) Calculer $f'(0)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1 c) Montrer que f est croissante sur I puis dresser son tableau de variations.

1 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0; 1[$.

0,5 b) Dresser le tableau de signes de f sur I .

1 4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on donnera.

0,5 b) Calculer $f(\sqrt{3})$ puis déduire $f^{-1}(3)$.

Exercice 2 (7,5 points)

Calculer et simplifier l'expression de $f'(x)$ dans chacun des

1,5 les suivants: ① $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 2)$; $I =]-\infty; +\infty[$

3 ② $f(x) = (3x^2 - 6x + 1)^{19}$; $I =]-\infty; +\infty[$; ③ $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$; $I =]2; +\infty[$

3 ④ $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$; $I =]-\infty; +\infty[$; ⑤ $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x^2 + 1}$; $I =]-\infty; +\infty[$

Exercice 3 (5,5 points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = [-4; +\infty[$ par: $f(x) = x\sqrt{x+4}$ et soit (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

0,75 1) a) Calculer $f(0)$; $f(-4)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1 b) Montrer que f est dérivable en 0 puis donner l'équation

de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1 c) Vérifier que $(\forall x \in]-4; +\infty[)$ $\frac{f(x) - f(-4)}{x + 4} = \frac{x}{\sqrt{x+4}}$ puis étudier la dérivabilité de f à droite en -4 , interpréter géométriquement le résultat obtenu.

1 2) a) Montrer que : $(\forall x \in]-4; +\infty[)$ $f'(x) = \frac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}$

1 b) Étudier le signe de $3x+8$ sur I puis dresser le tableau de variations de f sur I .

0,75 c) Construire la courbe (C) sur l'intervalle $[-4; 2]$