تمرين 1 : لاحظ رئيس جمعية رياضية أنه في كل سنة تحتفظ الجمعية ب 75% من منخرطيها القدامى ويكتسب فيها العضوية 800 منخرط جديد (نفترض أن تطور عدد المنخرطين يبقى بنفس الوتيرة سنة بعد سنة) نرمز بالرمز u_n لعدد المنخرطين بعد مرور n سنة ونضع: $u_0=1600$

1) أ- احسب u_1 و u_2 و u_3 و بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+800$

ب- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n<3200$

ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية واستنتج أنها متقاربة

2) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n=3200-u_n$

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n=1600\left(2-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

ج- احسب عدد المنخرطين بعد مرور 10 سنوات. بعد كم سنة سيفوق عدد المنخرطين 3195 ؟

د- احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

تمرين 2 : يحتوي صندوق على خمس كرات سوداء تحمل الأرقام: 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 وأربع كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 2 (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)

① نسحب تآنيا ثلاث كرات من الصندوق، ونعتبر الحدثين التاليين :

A "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون". B "الكرات الثلاث المسحوبة تحمل أرقاما زوجية"

أ- احسب احتمال A و B و $A\cap B$ ، هل الحدثان A و B مستقلان ؟

ب- علما أن الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون، ما هو احتمال أن تحمل أرقاما زوجية"

② نسحب الآن بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق وليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

أ- حدد القيم الممكنة التي يأخذها X وبين أن : $p(X=3)=\frac{1}{2}$

ب- حدد قانون احتمال X واحسب أمله الرياضي.

③ نسحب بالتتابع وبإحلال 10 كرات من الصندوق، احسب احتمال الحصول بالضبط 7 مرات على كرة بيضاء

تمرين 3 : (10 ن)

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=(x+1)e^{x}-1$

1) أ - احسب $g(-1)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ — 0,5

ب - بين أن لكل x من $]-1,+\infty[$ $g'(x)=(x+2)e^{x}$ واستنتج أن g تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$ — 1

2) أ - احسب $g(0)$ ثم بين أن $(\forall x\in[0,+\infty[)\ g(x)\geqslant 0$ و $(\forall x\in]-1,0])\ g(x)\leqslant 0$ — 0,75

الجزء الثاني: لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=]-1,+\infty[$ بما يلي $f(x)=e^{x}-\ln(x+1)-1$ وليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - احسب $\lim\limits_{x\to-1^{+}} f(x)$ ، وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها. — 0,75

ب - بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)=x\left(\frac{e^{x}}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ — 1

ج - بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$. — 0,5

2) أ - بين أن لكل x من I : $f'(x)=\frac{g(x)}{x+1}$ — 0,75

ب - ضع (معللا جوابك) جدول تغيرات الدالة f على المجال I. — 0,5

ج - أنشئ المنحنى (C). — 1

الجزء الثالث:

1) أ - تحقق أن لكل x من I : $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$ واستنتج قيمة التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$ — 0,75

ب - باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن: $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx=2\ln 2-1$ — 1

2) أ - احسب التكامل: $\int_0^1 (e^{x}-1)\,dx$. — 0,5

ب - استنتج مساحة الجزء المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما على التوالي $x=0$ و $x=1$. — 0,75