الثانية إقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني الاستدراكي 2017

التمرين الأول : (4,5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بما يلي :** $u_0 = 2$ **و** $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$	
1. أ- أحسب u_1 **و** u_2	$0,5$
1. ب- تحقق من أن $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{2u_n + 3}$ **ثم بين بالترجع أن لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n > 1$	$0,75$
1. ج- بين أن لكل n **من** $\mathbb{N}$**:** $u_{n+1} - u_n = 2\left(\dfrac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$	$0,5$
1. د- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية و أنها متقاربة**	$0,5$
2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$**المعرفة بما يلي :** $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$	
2. أ- تحقق أن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_n \neq 1$	$0,25$
2. ب- أحسب v_0	$0,25$
2. ج- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **هندسية أساسها** $\dfrac{1}{5}$	$0,5$
2. د- أحسب v_n **بدلالة** n	$0,25$
3.أ- بين أن $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$	$0,25$
3. ب- استنتج أن : $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$	$0,5$
3. ج- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$0,25$

التمرين الثاني : (4 ن)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأعداد 0، 1، 2 و كرتين لونهما أسود تحملان العددين 1، 2 ، كلها غير قابلة للتمييز باللمس . نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق .	
1. نعتبر الحدثين A و B التاليين : A " الكرتان المسحوبتان تحملان العدد 1 " B " سحب كرة بيضاء في المرة الأولى "	
1. أ- بين أن $p(A)=\dfrac{1}{10}$	0,5
1. ب- أحسب احتمال الحدث B و بين أن $p(A\cap B)=\dfrac{1}{20}$	1
1. ج- هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل جوابك .	0,5
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي جداء العددين اللذين تحملهما الكرتان المسحوبتان .	
2. أ- أنقل الجدول جانبه إلى ورقة تحريرك ثم أتمم ملأه معللا جوابك	1,5
2. ب- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X	0,5

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$				

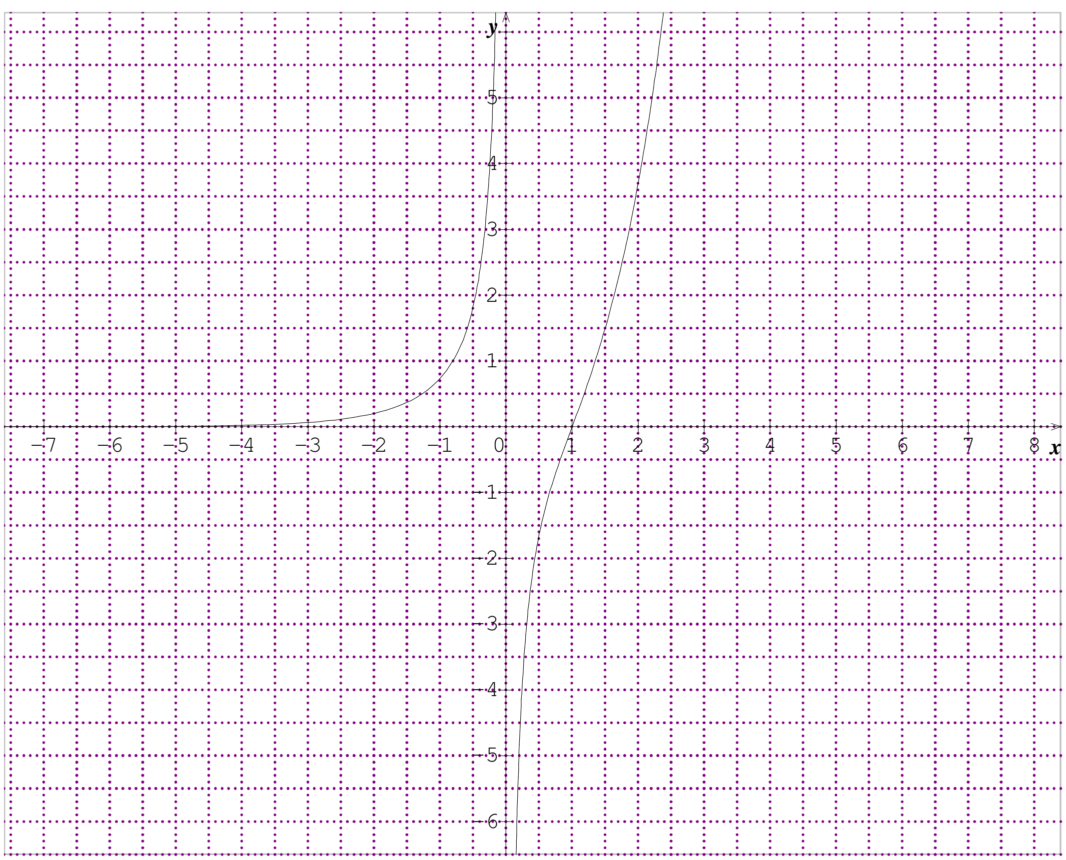
التمرين الثالث : (1,5 ن)

نضع : $I=\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+1}dx$ و $J=\int_0^1 \dfrac{x^3}{x^2+1}dx$	
1. أحسب I	0,5
2. أحسب $I+J$	0,5
3. استنتج أن $J=\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$	0,5

التمرين الرابع : (10 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)e^x$ و ليكن (C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$	
1. أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .	1,75

1. ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .	$0,75$
1. ج- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .	$1,75$
2. أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{\left(x^2-x+1\right)}{x^2}e^x$	1
2. ب- بين أن $f'(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}^*$	1
2. ج- استنتج منحى تغيرات الدالة f على $]-\infty,0[$ ثم على $]0,+\infty[$	$0,5$
2. د- أحسب $f(1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f	$1,25$
3. في الشكل أسفله (C_f) هو التمثيل المبياني للدالة f	
3. أ- اعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 1	1
3. ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=2$	$0,5$
3. ج- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=-2$	$0,5$



تصحيح التمرين الأول

1. أ- $$u_1=\frac{3u_0+2}{2u_0+3}=\frac{3(2)+2}{2(2)+3}=\frac{8}{7}$$

$$u_2=\frac{3u_1+2}{2u_1+3}=\frac{3\left(\frac{8}{7}\right)+2}{2\left(\frac{8}{7}\right)+3}=\frac{\frac{38}{7}}{\frac{37}{7}}=\frac{38}{37}$$

1. ب-

✓ **ليكن** $n\in\mathbb{N}$

لدينا : $$u_{n+1}-1=\frac{3u_n+2}{2u_n+3}-1=\frac{3u_n+2-2u_n-3}{2u_n+3}=\frac{u_n-1}{2u_n+3}$$

إذن : $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

✓

- **من أجل** $n=0$ **:**
  لدينا $u_0=2$
  إذن : $u_0>1$
- **ليكن** $n\in\mathbb{N}$
  نفترض أن $u_n>1$
  و نبين أن $u_{n+1}>1$ ؟
  لدينا : $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}$
  و حسب الافتراض $u_n>1$ **إذن** $u_n-1>0$ **و** $2u_n+3>0$
  إذن $\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}>0$ **إذن** $u_{n+1}-1>0$
  و منه $u_{n+1}>1$
- **نستنتج أن :** $u_n>1$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

1. ج- ليكن $n\in\mathbb{N}$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}-u_n=\dfrac{3u_n+2-2u_n^2-3u_n}{2u_n+3}=\dfrac{2\left(1-u_n^2\right)}{2u_n+3}=2\left(\dfrac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$

إذن : لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1}-u_n=2\left(\dfrac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)$

1. د-

✓ **ليكن** $n\in\mathbb{N}$

لدينا : $u_n>1$ **إذن :** $1-u_n^2<0$ **و** $2u_n+3>0$

إذن $2\left(\dfrac{1-u_n^2}{2u_n+3}\right)<0$

و منه لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1}-u_n<0$

و بالتالي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية**

✓ **بما أن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **تناقصية و مصغورة (بالعدد 1) فإن** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متقاربة**

2. أ- نفترض أنه يوجد n **من** $\mathbb{N}$ **بحيث :** $v_n=1$

إذن : $\dfrac{u_n-1}{u_n+1}=1$

إذن : $u_n-1=u_n+1$

إذن $-1=1$

و هذا غير ممكن

و بالتالي : لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_n\neq 1$

2. ب- $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$

2. ج – ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}-1}{\dfrac{3u_n+2}{2u_n+3}+1}=\dfrac{\dfrac{u_n-1}{2u_n+3}}{\dfrac{5u_n+5}{2u_n+3}}=\dfrac{u_n-1}{5(u_n+1)}=\dfrac{1}{5}.v_n$

إذن : لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_{n+1}=\dfrac{1}{5}.v_n$

و منه : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **هندسية أساسها** $q=\dfrac{1}{5}$

2. د- ليكن $n\in\mathbb{N}$ **:**

لدينا : $v_n=v_0.q^n$

إذن : $v_n = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^n$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

3. أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$ **:**

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \Leftrightarrow u_n - 1 = (u_n + 1)v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n - 1 = u_n v_n + v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n - u_n v_n = 1 + v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n (1 - v_n) = 1 + v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

إذن : لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3. ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$ **:**

لدينا : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ و $v_n = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5}\right)^n$

إذن : لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

3. ج- بما أن $-1 < \frac{1}{5} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

فإن : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1$

تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب بالتتابع و بدون إحلال كرتين من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega = A_5^2 = 20$

1. أ- A **" الكرتان المسحوبتان تحملان العدد** 1 **"**

$$cardA = A_2^2 = 2$$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

1. ب-

✓ B **" سحب كرة بيضاء في المرة الأولى "**

$$cardB = A_3^1 \times A_4^1 = 3 \times 4 = 12$$

$$p(B) = \frac{cardB}{card\,\Omega} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

✓ $A \cap B$ **" الكرتان المسحوبتان تجملان العدد 1 و الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء "**

$$card(A \cap B) = A_1^1 \times A_1^1 = 1$$

$$p(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card\,\Omega} = \frac{1}{20}$$

1. ج- لدينا : $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$ و $p(A) \times p(B) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{50}$

بما أن $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ **فإن الحدثين** A **و** B **غير مستقلين .**

2. أ-

$$\begin{cases} 0,\overline{0} \\ \overline{0},0 \end{cases} \rightarrow \quad X = 0$$

$$p(X = 0) = \frac{2\left(A_1^1 \times A_4^1\right)}{20} = \frac{2 \times 1 \times 4}{2} = \frac{2}{5}$$

$$1,1 \quad \rightarrow \quad X = 1$$

$$p(X = 1) = p(A) = \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} 1,2 \\ 2,1 \end{cases} \rightarrow \quad X = 2$$

$$p(X=2)=\frac{2\left(A_2^1\times A_2^1\right)}{20}=\frac{2\times2\times2}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

$$2,2 \quad \to \quad X=4$$

$$p(X=4)=\frac{A_2^2}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

2. ب- الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(0\times\frac{2}{5}\right)+\left(1\times\frac{1}{10}\right)+\left(2\times\frac{2}{5}\right)+\left(4\times\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}+\frac{4}{5}+\frac{4}{10}=\frac{13}{10}$$

تصحيح التمرين الثالث

.1 $I=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{1}{2}\ln(1)=\frac{1}{2}\ln(2)$

.2 $I+J=\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x^3+x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}dx=\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

.3 لدينا : $I+J=\frac{1}{2}$ **إذن** $J=\frac{1}{2}-I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(2)$ **و منه** $J=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$

تصحيح التمرين الرابع

.1 أ-

✓ **لدينا :** $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)e^x=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)=1\\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases}$

✓ **لدينا :** $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{e^x}{x} = +\infty$

لأن $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$

✓ **<u>التأويل الهندسي :</u>** (C_f) **يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار** $+\infty$

1. ب-

✓ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x = 0$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

✓ **<u>التأويل الهندسي :</u>** (C_f) **يقبل مقاربا أفقيا معادلته** $y = 0$ **بجوار** $-\infty$

1. ج-

✓ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{x-1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^x = 1 \end{cases}$

✓ $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^x = 1 \end{cases}$

✓ **<u>التأويل الهندسي :</u>** (C_f) **يقبل مقاربا عموديا معادلته** $x = 0$

2. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:
لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{x-1}{x}\right)e^x\right)' \\ &= \left(\frac{x-1}{x}\right)' e^x + \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(e^x\right)' \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{x^2} e^x + \frac{x-1}{x} e^x \\ &= \frac{1}{x^2} e^x + \frac{x-1}{x} e^x \\ &= \left(\frac{1+x^2-x}{x^2}\right) e^x \end{aligned}$$

إذن : لكل x **من** $\mathbb{R}^*$ **:** $f'(x) = \dfrac{\left(x^2-x+1\right)}{x^2} e^x$

2. ب- ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:

لدينا $f'(x) = \dfrac{\left(x^2-x+1\right)}{x^2} e^x$

و لدينا : $e^x > 0$ **و** $x^2 > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ **هي إشارة** x^2-x+1

لدينا : $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1-4 = -3 < 0$ إذن $x^2-x+1>0$

و بالتالي : $f'(x) > 0$ **لكل** x **من** $\mathbb{R}^*$

2. ج- على $]-\infty, 0[$ **: بما أن** $f'(x) > 0$ **فإن** f **تزايدية قطعا**

و على $]0, +\infty[$ **: بما أن** $f'(x) > 0$ **فإن** f **تزايدية قطعا**

2. د-

✓ **لدينا :** $f(1) = \dfrac{1-1}{1} e^1 = 0$

✓ **جدول تغيرات** f **:**

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\Vert$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 1 **:**

$$y = f'(1).(x-1) + f(1)$$

لدينا : $f(1) = 0$ **و** $f'(1) = e$

إذن : $y = e.(x-1) + 0$

إذن : $(T) : \boxed{y = ex - e}$

3. ب- مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ **هو عدد نقط تقاطع** (C_f) **و المستقيم الأفقي الذي معادلته** $y = 2$ **:**
المعادلة تقبل حلين .

3. ج- مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$ **هو عدد نقط تقاطع** (C_f) **و المستقيم الأفقي الذي معادلته** $y = -2$ **:**
المعادلة تقبل حلا وحيدا .

つづく