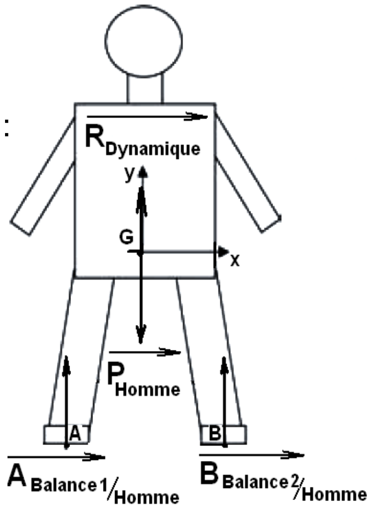
Rep Ex1 :

Mouvement de translation rectiligne uniformément varié

1- Voir figures ci-contre.



2- On peut appliquer directement le théorème du moment dynamique :

$$\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}} + \overrightarrow{B_{Balance2/Homme}} + \overrightarrow{P_{Homme}} = \overrightarrow{R_{Dynamique}}$$

Projection sur l'axe *(y)* :

$$\left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| + \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\| - m \cdot g = m \cdot a_{Homme/sol}$$

$$\left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| + \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\| - 80 \cdot 10 = 80 \cdot 3$$

$$\left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| + \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\| = 1040 \quad (1)$$

On peut appliquer directement le théorème du moment dynamique appliqué à l'homme isolé. Il faut écrire tous les moments résultants au même point. L'énoncé demande de les écrire au point G.

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{/G}\,\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}} + \overrightarrow{\mathscr{M}_{/G}\,\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}} + \overrightarrow{\mathscr{M}_{/G}\,\overrightarrow{P_{Homme}}} = \overrightarrow{\mathscr{M}_{/G}\,\overrightarrow{m \cdot a_{Dynamique}}}$$

$$\overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{A_{Balance1/Homme}} + \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{B_{Balance2/Homme}} + \overrightarrow{GG} \wedge \overrightarrow{P_{Homme}} = \overrightarrow{GG} \wedge \overrightarrow{m \cdot a_{Dynamique}}$$

$$\begin{pmatrix} -L \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L \\ -h \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\| \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\left\|\overrightarrow{P_{Homme}}\right\| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \left\|\overrightarrow{R_{Dynamique}}\right\| \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \cdot \left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \cdot \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projection sur l'axe *(z)* : $-L \cdot \left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| + L \cdot \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\| = 0$ *(2)*

3- De l'équation (2), on en déduit que : $\left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| = \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\|$

Et donc en remplaçant dans (1) : $2\left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| = 1040$

Alors : $\left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| = \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\| = 520\,N$; Donc : $\left\|\overrightarrow{A_{Balance1/Homme}}\right\| = \left\|\overrightarrow{B_{Balance2/Homme}}\right\| = 52\,kg$

4- L'énergie que la plate-forme donne à l'homme pour pouvoir le monter pendant 5 secondes en régime établi :

$$E = \mathscr{P} \cdot t = P_{Homme} \cdot V_{Homme/sol} \cdot t = 80 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 5 = 24000\,J$$

5- Le travail que la plate-forme donne à l'homme pour pouvoir le monter sur ℓ = 30 m en régime établi : $W = P_{Homme} \cdot \ell = 80 \cdot 10 \cdot 30 = 24000\,J$

6- Conclusion : le travail fourni par le plate-forme sur 30 m est égale à l'énergie à fournir pour déplacer l'homme en 5 secondes.

7- L'énergie cinétique emmagasinée par l'homme seul lorsque la plate-forme est en régime établi : $E_c = \frac{1}{2} m \cdot V_{Homme/sol}^2 = 0,5 \cdot 80 \cdot 6^2 = 1440\,J$

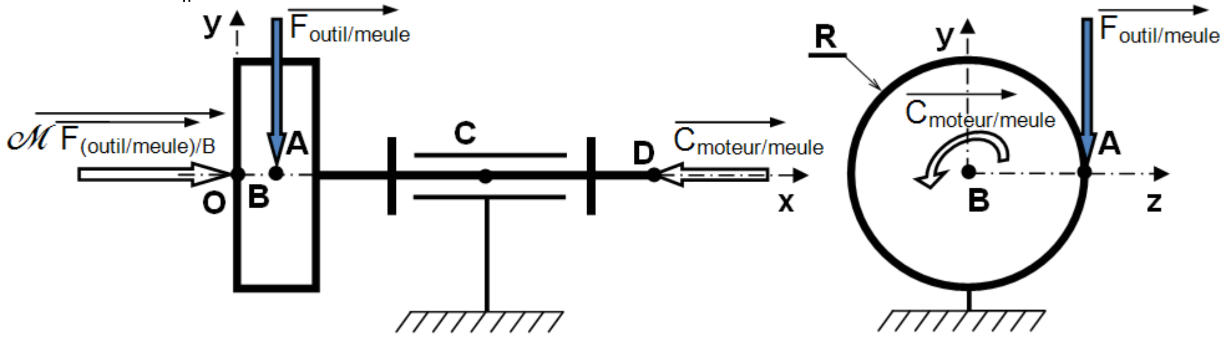
Rep Ex2 :

Mouvement de rotation uniformément varié

1- Voir figure ci-dessous.

Le moment résultant de l'action de l'outil sur la meule :

$$\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}\, F_{(outil/meule)}}_{/B}\right\| = R\cdot\left\|\overrightarrow{F_{outil/meule}}\right\| = 0,4\cdot 50 = 20\,Nm$$ (positif autour de l'axe *(x)*) ;



2- En phase de démarrage, la meule est soumise à trois moments sur l'axe *(x)* :

- le couple du moteur sur la meule : $\overrightarrow{C_{moteur/meule}}$;
- le moment résultant de l'action de l'outil sur la meule :

$$\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}\, F_{(outil/meule)}}_{/B}\right\| = R\cdot\left\|\overrightarrow{F_{outil/meule}}\right\| = 0,4\cdot 50 = 20\,Nm$$ (positif autour de l'axe *(x)*) ;

- le moment dynamique : $\mathcal{M}_{dynamique} = J\cdot\ddot{\theta}_{meule/bâti} = J\cdot\dot{\omega}_{meule/bâti}$ et avec :

$$J = \frac{1}{2}m\cdot R^2 = \frac{1}{2}\rho\cdot v\cdot R^2 = \frac{1}{2}\cdot 7800\cdot\pi\cdot 0,15\cdot 0,4^2\cdot 0,4^2 = 47,02kg\cdot m^2$$

$\mathcal{M}_{dynamique} = J\cdot\ddot{\theta}_{meule/bâti} = 47,02\cdot 13 = 611,26Nm$ est dirigé dans le sens du couple moteur, c'est-à-dire sur l'axe *(-x)*. Donc : $\mathcal{M}_{dynamique} = -611,26Nm$ sur l'axe *(x)*.

3- On applique le principe fondamental de la dynamique (théorème du moment dynamique)

$$\overrightarrow{C_{moteur/meule}} + \overrightarrow{\mathcal{M}\, F_{(outil/meule)}}_{/B} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{dynamique}}$$

en projection sur l'axe *(x)* et en un point quelconque puisque nous prenons en compte uniquement des moments : $\left\|\overrightarrow{C_{moteur/meule}}\right\| + 20 = -611,26$

4- $\left\|\overrightarrow{C_{moteur/meule}}\right\| = -631,26Nm$ sur l'axe *(x)*.

5- L'arbre devra résister à une torsion sous un couple de 631,26 Nm. Il devra être capable de transmettre ≈ 632 Nm à la meule pour pouvoir l'entraîner.

6- L'énergie que le moteur absorbe pendant 5 secondes en régime établi :

$$E = \mathcal{P}\cdot t = \left\|\overrightarrow{C_{moteur/meule}}\right\|\cdot\omega_{meule/bâti}\cdot t = 20\cdot 56\cdot 5 = 5600J$$

7- Le travail que l'homme fournit pour affûter son outil sur 100 tours de meule :

$$W = \left\|\overrightarrow{C_{moteur/meule}}\right\|\cdot\theta_{meule/bâti} = 20\cdot 2\pi\cdot 100 = 12560J$$

8- L'énergie cinétique emmagasinée par la meule isolée lorsqu'elle tourne à vitesse constante :

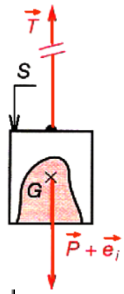
$$E_c = \frac{1}{2}J\cdot\omega^2_{meule/bâti} = 0,5\cdot 47\cdot 56^2 = 73696J$$

Rep Ex3 :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = 3 \cdot 2300 \cdot 10^3 = m \cdot a_G = 100 \cdot 10^3 \cdot a_G \quad \text{donc : } a_G = \frac{3 \cdot 2300 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3} = 69\,m/s^2 > 6{,}7 \cdot g$$

L'accélération supportée est 7 fois supérieure à l'accélération de la pesanteur g.

Rep Ex4 :



Isoler *(S)* = {cabine + charge} ; *(S)* est en équilibre relatif sous :

Les charges : $\vec{T} = T \cdot \vec{z}$; $\vec{P} = P \cdot \vec{z}$

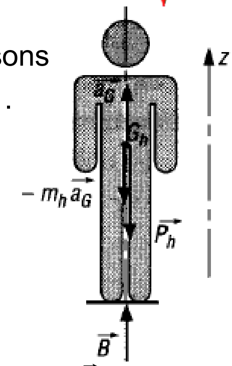
L'effet d'inertie: $\vec{e_i} = -m \cdot g \cdot \vec{z}$; Les efforts dus à la pression atmosphérique, se compensent

Par conséquent : *T* - m.*g* - m .a_G = 0 D'où *T = m.(g +* a_G*)*

Application numérique : si a_G = 0 : *T* = 5000N

si a_G = 2 m/s^2 : *T* = 6000 N

Rep Ex5 :



a- Isolons l'ensemble cabine + homme + balance : Afin de simplifier l'étude, supposons que le centre de gravité G de l'ensemble est situé sur la verticale commune à $\vec{T}$ et $\vec{P}$. L'action des rails, perpendiculaires aux autres forces, n'est pas prise en compte.

Le principe de d'Alembert s'écrit $\vec{T} + \vec{P}$ - m.$\vec{a_G}$ = $\vec{0}$.

En projection sur la verticale z : *- P +T - m.*a_G *= 0* ;

- (720 + 80) 9,81 + 9 000 - (720 + *80)* a_G *= 0*

d'où a_G = 1,44 m/s^2.

b- Isolons l'homme seul : L'homme est soumis à 3 actions : son poids $\vec{P_h}$,

l'action exercée par la balance $\vec{B}$ et la force d'inertie $(-m_h \cdot \vec{a_G})$. d'où : $\vec{P_h} + \vec{B} + (-m_h \cdot \vec{a_G}) = \vec{0}$

en projection sur z, on obtient : $-P_h + B - m_h \cdot a_G = 0$; $B = P_h + m_h \cdot a_G = m_h(g + a_G) = 80 \cdot (9{,}81 + 1{,}44) = 900\,N$

Masse fictive mesurée par la balance : $m_h' = 900 / 9{,}81 = 91{,}74\,kg$

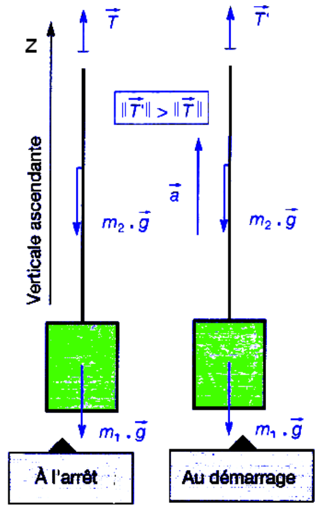
Remarque : pour le mouvement inverse (a_G = - 1,44 m/s^2), avec freinage, la masse fictive de l'individu serait : 80 - 11,74 = 68,26 kg.

Rep EX6 :

1- La contrainte maximale dans le câble se situe à sa partie supérieure lorsqu'il est complètement déroulé.

- Masse du câble déroulé : $m_2 = \rho_v \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot L = 7200 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}01^2}{4} \cdot 30 = 16{,}956\ kg$
- Masse totale soutenue : $m_T = m_1 + m_2 = 1516{,}956\ kg$
- Calculer le coefficient de sécurité à l'arrêt :
  Il s'agit d'un calcul de résistance des matériaux pour un câble soumis à la traction simple :

$$\frac{F}{S} \le \frac{Re}{s} \Rightarrow s \le \frac{Re \cdot S}{F} = \frac{Re \cdot S}{(m_1 + m_2)g} = \frac{1200 \cdot \pi \cdot 5^2}{1516{,}956 \cdot 10} = 6{,}2$$



2- Calculer l'accélération entraînant le dépassement de la limite élastique du câble :

Il faut isoler {câble déroulé + monte-charge} (voir ci-contre),

$$\sum proj_{/z} \left\| \overrightarrow{F_{ext}} \right\| = (m_1 + m_2)a \quad \text{Soit : } T - (m_1 + m_2) = (m_1 + m_2)a$$

Alors : $T = (m_1 + m_2)(a + g)$ il faut que : $\frac{T}{S} \le Re$ soit $T_{max} = S \cdot Re$

Donc : $S \cdot Re = (m_1 + m_2)(a_{max} + g)$

D'où : $a_{max} = \frac{S \cdot Re}{(m_1 + m_2)} - g = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 1200}{1516{,}956} - 10 = 52{,}098\ m/s^2$

Rep Ex7-

1- Isoler et choisir un repère : On isole le cylindre et l'on choisit $\mathcal{R}_g$ lié au sol.

Modéliser les actions mécaniques :

○ Poids représenté par $(G, M\vec{g})$.

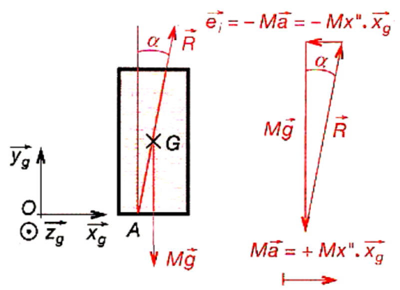
○ Appui-plan représenté par R, dans le plan $(O, \vec{x_g}, \vec{y_g})$ de symétrie inclinée de α de façon à s'opposer au mouvement éventuel. à la limite de glissement α = φ (angle de frottement tel que f = tg φ)

Principe fondamental	Méthode de d'Alembert
$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = M\vec{a}$	$\sum \overrightarrow{F_{ext}} + \vec{e_i} = \vec{0}$

En projection sur $\vec{x_g}$ et $\vec{y_g}$

Principe fondamental	Méthode de d'Alembert
$R\sin\alpha = M\ddot{x}$ (1)	$R\sin\alpha - M\ddot{x} = 0$ (1)
$R\cos\alpha - Mg = 0$ (2)	$R\cos\alpha - Mg = 0$ (2)

Condition de non glissement

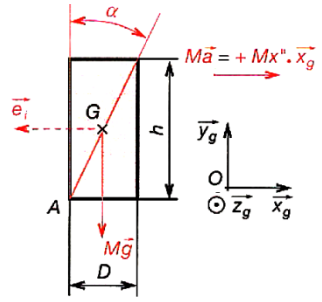


2- On déduit de (1) et (2) que $tg\alpha = \dfrac{\ddot{x}}{g}$

- d'où la condition de non glissement : $\dfrac{\ddot{x}}{g} \le tg\varphi$ soit $\ddot{x} \le f \cdot g = 5\,m/s^2$
- d'où la condition de non basculement (autour de A) si :

$\dfrac{\ddot{x}}{g} \le \dfrac{D}{h}$ soit $\ddot{x} \le g \cdot \dfrac{D}{h} = 3{,}57\,m/s^2$

Condition de non basculement



Rep Ex8-

A/ 1- • Système étudié : le corps S_1

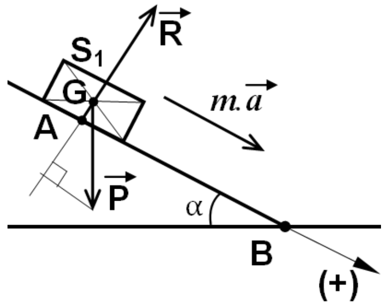
• Bilan des efforts : $\vec{R}$; $\vec{P}$

• Théorème utilisé : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \vec{a}$

Application du théorème : $\vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

En projetant sur le plan incliné il vient : $m \cdot g \cdot \sin\alpha + 0 = m \cdot a$

Donc : $\boxed{a = g \cdot \sin\alpha = 10 \cdot \sin 30° = 5\,m/s^2}$



2- Origine des espaces : A

Origine des temps : départ de S_1 (V_0 = 0 à t = 0)

L'équation du mouvement est : $x = \dfrac{1}{2}a \cdot t^2 + V_0 \cdot t + x_0$; $\boxed{x = \dfrac{1}{2}a \cdot t^2}$; $\boxed{V = 5 \cdot t}$; $\boxed{V^2 = 10 \cdot x}$

3- La distance AB est donnée par la troisième équation : $\boxed{x = \dfrac{V^2}{10} = \dfrac{3^2}{10} = 0{,}9\,m}$

4- Le temps mis par S_1 pour parcourir AB est : $\boxed{t = \dfrac{V}{5} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6\,s}$

B/ 1- La relation fondamentale de la dynamique appliquée à S2 sur lequel ne s'exerce qu'une seule force, son poids, permet d'écrire : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$ la projection de cette relation donne :

- **Sur Ox :** $0 = m \cdot a_x$ donc $a_x = 0$; le mouvement est rectiligne est uniforme d'équation :

  $x = V_{0x} \cdot t + x_0$ or $V_{0x} = V_c = 2{,}24\,m/s$ et $x_0 = 0$; alors : $\boxed{x = 2{,}24 \cdot t}$

- **Sur Oy :** $m \cdot g = m \cdot a_y$ donc $a_y = g$; le mouvement est uniformément accéléré d'équation :

  $y = \dfrac{1}{2}a_y \cdot t^2 + V_{0y} \cdot t + y_0$ or $V_{0y} = 0$ et $y_0 = 0$; alors : $\boxed{y = 5 \cdot t^2}$

2- Le temps de chute : $y = h = 20\,m$; $\boxed{t = \sqrt{\dfrac{y}{5}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = 2\,s}$

3- Distance OD : $t = 2s$ donc $\boxed{x = 2{,}24 \cdot t = 2{,}24 \cdot 2 = 4{,}48\,m}$

Rep Ex9:

a- Bilan des actions mécaniques extérieures :

- En A il y a roulement type BC ce qui donne une liaison rotule, d'où le torseur statique en A est de la forme suivant :

$$\{\tau_{1/S}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- En B il y a roulement type RU ce qui donne une liaison linéaire annulaire, d'où le torseur statique en B est de la forme suivant :

$$\{\tau_{2/S}\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- L'action de pesanteur est modélisable en G par :

$$\{\tau_{T/S}\}_G = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

b- L'expression de ces torseurs en A : (c.à.d, appliquer la **relation de transport** en A)

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}(2/S)}_{/A} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_{2/S}} = \begin{pmatrix} 0,32 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,32 \cdot Z_B \\ 0,32 \cdot Y_B \end{pmatrix} \text{ ; donc } \{\tau_{2/S}\}_{B\to A} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & -0,32 \cdot Z_B \\ Z_B & 0,32 \cdot Y_B \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}(T/S)}_{/A} = \vec{0} + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{F_{T/S}} = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -200 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix} \text{ ; donc } \{\tau_{T/S}\}_{G\to A} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & -30 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}(3/S)}_{/A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_{3/S}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ ; donc } \{\tau_{3/S}\}_{C\to A} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 100 & 0 \\ 0 & 40 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

c- Appliquer PFD à S : $\{\tau_{1/S}\}_A + \{\tau_{2/S}\}_{B\to A} + \{\tau_{T/S}\}_{G\to A} + \{\tau_{3/S}\}_{C\to A} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ J_x \cdot \overrightarrow{\theta''} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$${}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & -0,32 \cdot Z_B \\ Z_B & 0,32 \cdot Y_B \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -200 & 0 \\ 0 & -30 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 100 & 0 \\ 0 & 40 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & J_x \cdot \theta'' \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$X_A = 0; Y_A = 131,25; Z_A = 0$ et $X_B = 0; Y_B = -31,25\,N; Z_B = 0$

d- L'accélération angulaire θ'' du mouvement de S et la nature de ce mouvement :

$\theta'' = \dfrac{2}{J_x} = \dfrac{2}{8.10^{-3}} = 250\ rad/s^2$; Mouvement de rotation uniformément accéléré.

e- Le temps nécessaire pour atteindre 1500 tr/mn : $\dot{\theta} = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_i$ Alors : $t = \dfrac{2\pi N}{60 \cdot \ddot{\theta}} = \dfrac{2\pi \cdot 1500}{60 \cdot 250} = 0,628\ s$

Rep Ex10 :

Isoler l'ensemble tournant (figure ci-dessous) et écrire le principe fondamental en projection sur l'axe de rotation : $C_m - C_r = J_{G\vec{z}}.\omega' \Rightarrow \omega' = \dfrac{C_m - C_r}{J_{G\vec{z}}}$

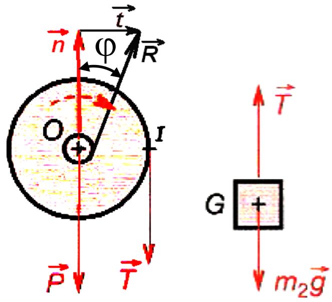
1- Frottement négligé : $\omega' = \dfrac{C_m - C_r}{0,5 \cdot m \cdot R^2} = \dfrac{5-0}{0,5 \cdot 50 \cdot 0,15^2} = 8,88\ rad/s$

et $\omega = t\omega'$ alors : $t = \dfrac{\omega}{\omega'} = \dfrac{2\pi \cdot 1500}{60 \cdot 8,88} = 17,68\ s$

2- Cas du frottement : $\omega' = \dfrac{C_m - C_r}{0,5 \cdot m \cdot R^2} = \dfrac{5-0,2}{0,5 \cdot 50 \cdot 0,15^2} = 8,53\ rad/s$ et $\omega = t\omega'$

alors : $t = \dfrac{\omega}{\omega'} = \dfrac{2\pi \cdot 1500}{60 \cdot 8,53} = 18,40\ s$

Rep Ex11 :



♦Isolement du tambour : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

Proj/oy : $m_1 \cdot g - n + T = 0$

$$\sum M_{Gz}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = T \cdot R - n \cdot f \cdot r = J_{Gz} \cdot \omega'$$

♦Isolement de la charge : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{T} + m_2 \cdot \vec{g} = m_2 \cdot \vec{a}$

$$-T + m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$$

♦Aspect cinématique : L'accélération de la charge est égale à l'accélération tangentielle du tambour

$$a = a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = \omega' \cdot R$$

♦Il faut donc résoudre : $m_1 \cdot g - n + T = 0 \;\Rightarrow\; n = T + m_1 \cdot g$

$$m_2 \cdot g - T = m_2 \cdot R \cdot \omega' \;\Rightarrow\; T = m_2 \cdot (g - \omega' \cdot R)$$

$$T \cdot R - n \cdot f \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \cdot \omega' \;\Rightarrow\; m_2 \cdot (g - \omega' \cdot R) \cdot R - [m_2 \cdot (g - \omega' \cdot R) + m_1 \cdot g] \cdot f \cdot r = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot R^2 \cdot \omega'$$

Donc : $\omega' = \dfrac{g\left[m_2 \cdot R - (m_1 + m_2) \cdot f \cdot r\right]}{R\left[0,5 \cdot m_1 \cdot R + m_2 (R - f \cdot r)\right]}$

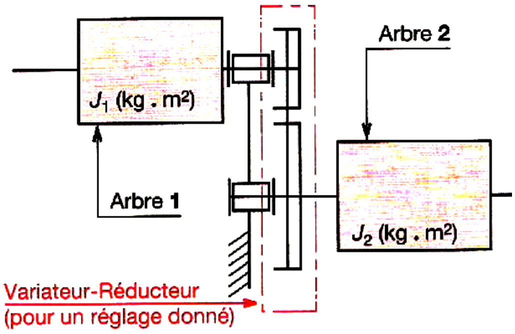
Alors : $a = \dfrac{g\left[m_2 \cdot R - (m_1 + m_2) \cdot f \cdot r\right]}{0,5 \cdot m_1 \cdot R + m_2 (R - f \cdot r)} = \dfrac{10\left[30 \cdot 0,2 - (60 + 30) \cdot 0,2 \cdot 0,01\right]}{0,5 \cdot 60 \cdot 0,2 + 30(0,2 - 0,2 \cdot 0,01)} = 4,85 \ m/s^2$

Mouvement de rectiligne uniformément accéléré : $V = a \cdot t$ et $h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ d'où $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{4,85}} = 2,03$

Rep Ex12 :

1- Isolons l'arbre 1 : $C_{m1} - F \cdot r_1 = J_1 \theta_1''$

Isolons l'arbre 2 : $F \cdot r_2 - C_{r2} = J_2 \cdot \theta_2'' \;\Rightarrow F = \dfrac{J_2 \cdot \theta_2'' + C_{r2}}{r_2}$



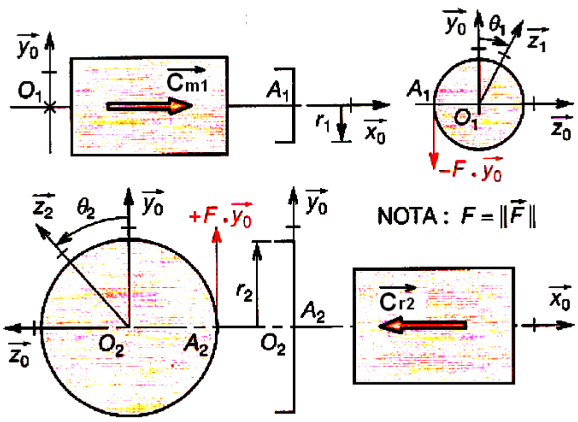
Relation cinématique : $\dfrac{\theta_2''}{\theta_1''} = \dfrac{r_1}{r_2} \;\Rightarrow\; \theta_2'' = \theta_1'' \cdot \dfrac{r_1}{r_2}$

Alors : $\left[J_1 + J_2\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2\right] \cdot \theta_1'' = C_{m1} - C_{r2} \cdot \dfrac{r_1}{r_2}$

Donc : $\theta_1'' = \dfrac{C_{m1} - C_{r2} \cdot \frac{r_1}{r_2}}{J_1 + J_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = \dfrac{12 - 20\frac{15}{60}}{0,2 + 3\left(\frac{15}{60}\right)^2} = 18,06 \ rad/s$

2- Duré du démarrage (aspect cinétique) :

$$\theta_1' = \theta_1'' \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{\theta_1'}{\theta_1''} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60 \cdot 18,06} = 8,69 \ s$$



3- Duré de l'arrêt :

$$\theta_1'' = \frac{-C_{r2} \cdot \frac{r_1}{r_2}}{J_1 + J_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = \frac{-20\frac{15}{60}}{0,2 + 3\left(\frac{15}{60}\right)^2} = -12,903 \ rad/s$$

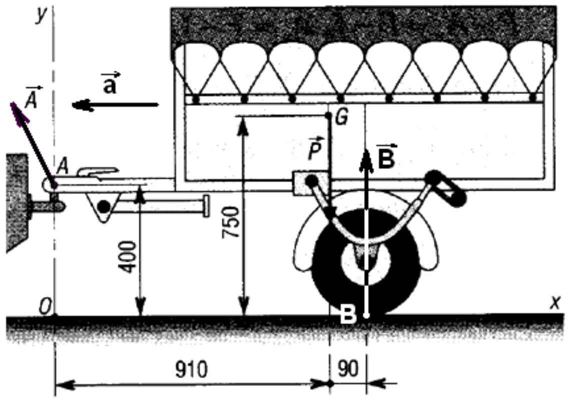
$$t = \frac{\theta_1'}{\theta_1''} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60 \cdot 12,903} = 12,16 \ s$$

Rep Ex13 :

a- L'accélération du mouvement si celle-ci est constante :

$V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)$ avec : $V_0 = x_0 = 0 ; V = 20\,m/s\,; x = 100\,m$; donc : $a = \dfrac{V^2}{2x} = \dfrac{20^2}{2 \cdot 100} = 2\,m/s^2$

b- Les actions exercées en A et B :



$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

En projection sur l'axe *(x)* : $A_x + 0 + 0 = m \cdot a$

Donc : $A_x = \dfrac{3000}{10} \cdot 2 = 600\,N$

En projection sur l'axe *(y)* : $A_y + B_y - P = 0$

$A_y + B_y = 3000\,N$

$\Rightarrow \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}\vec{F}_{ext}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}\vec{A}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}\vec{B}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{/O}\vec{P}} = \vec{0}$

$$= \overrightarrow{OA} \wedge \vec{A} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{B} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

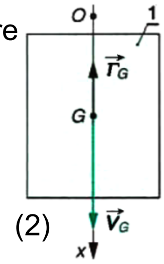
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 600 \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,91 \\ 0,75 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -3000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,4 \cdot A_z \\ 0 \\ -0,4 \cdot 600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,91 \cdot 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $B_y = 2970\,N$ et $A_y = 30\,N$, $A_z = 0$

Rep Ex 15

1- Le mouvement de la charge étant rectiligne et uniformément décéléré on peut, sur la figure ci-contre, représenter les vecteurs *vitesse* $\vec{V_G}$ et *accélération* $\vec{\Gamma_G}$ du point G.



On choisit *(O, $\vec{x}$)* orienté dans le sens du mouvement. L'origine *O* correspond à la position du point G au début du freinage. On note : $\overrightarrow{OG} = x.\vec{x}$.

On choisit l'origine des temps *t* = 0 au début du freinage.

Les équations du mouvement du point G s'écrivent : $x = \frac{1}{2}\gamma_t \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$ (1) ; $v = \gamma_t \cdot t + v_0$ (2)

Au début du freinage à t = 0 : $x = 0$ donc $v = 0,2\,m/s$

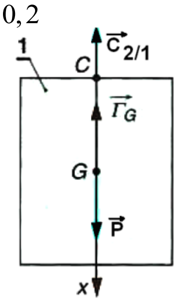
La relation (1) permet de déterminer : $x_0 = 0$ et La relation (2) permet de déterminer : $v_0 = 0,2$

à la fin du freinage à t = 0,1 : $v = 0$

La relation (2) permet de déterminer alors : $\gamma_t = -2\,m/s^2$ d'où : $\vec{\Gamma_G} = -2\vec{x}$;

la relation (1) s'écrit alors : $x = -t^2 + 0,2.t$

La distance de freinage correspond à la valeur de x pour t = 0,1 soit x = 0,01m



2- Les actions mécaniques extérieurs appliquées à la charge 1 sont :

- l'action de la pesanteur : $\vec{P} = M \cdot \vec{g}$ d'où $P = 2 \cdot 10^4 \vec{x}$

- l'action du câble 2 sur 1. Cette action est modélisable en C par un glisseur : $\overrightarrow{C_{2/1}} = -\left\|\overrightarrow{C_{2/1}}\right\| \vec{x}$

l'application du principe fondamental de la dynamique au point G permet d'écrire : $\vec{P} + \overrightarrow{C_{2/1}} = M \cdot \vec{\Gamma_G}$

En projetion sur *(G, $\vec{x}$)* on obtient : $2 \cdot 10^4 - \left\|\overrightarrow{C_{2/1}}\right\| = 2000 \cdot (-2)$ $\left\|\overrightarrow{C_{2/1}}\right\| = 24000\,N$ d'où $\overrightarrow{C_{2/1}} = -24000 \cdot \vec{x}$

3- Pour un déplacement élémentaire, le travail élémentaire des actions mécaniques extérieures appliquées à la charge s'écrit : $dW = \overrightarrow{C_{2/1}} \cdot \overrightarrow{dx} + \vec{P} \cdot \overrightarrow{dx} = -\left\|\overrightarrow{C_{2/1}}\right\| \cdot dx + \left\|\vec{P}\right\| \cdot dx$

AN : $dW = (-24000 + 20000) \cdot dx = -4000 \cdot dx$

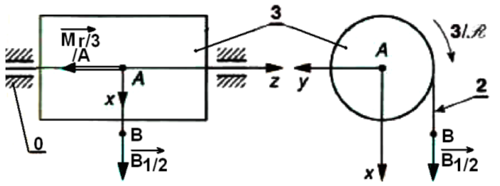
pour un déplacement x = 0,01 m ; on obtient : $W = -4000 \cdot 0,01 = -40\,J$

4- La charge et animée d'un mouvement de translation, On peut donc écrire que :

$$E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2} M (V_2^2 - V_1^2) = \frac{2000(0 - 0,2^2)}{2} = -40\,J.$$

En appliquant le théorème sur la variation d'énergie cinétique d'un solide on obtient : $W_{12} = E_{c2} - E_{c1} = -40\,J$

5- Les actions mécaniques extérieures appliquées à S sont :



- l'action de 1 sur 2 modélisable en B par le torseur glisseur :

$$\{\tau_{1/2}\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{1/2}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\Re} = {}_B\begin{Bmatrix} 24 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- l'action de liaison pivot sans frottement entre le bâti 0 et le tambour 3.

Cette action est modélisable en A par le torseur : $\{\tau_{0/3}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{0/3}} \\ \overrightarrow{M_{0/3/A}} \end{Bmatrix}_{\Re} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{0/3} & L_{0/3} \\ Y_{0/3} & M_{0/3} \\ Z_{0/3} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

- l'action du réducteur sur 3 modélisable en A le torseur couple : $\{\tau_{r/3}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{r/3/A}} \end{Bmatrix}_{\Re} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{r/3} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

L'inertie de *S* étant négligée. le principe fondamental de la dynamique appliqué en A permet d'écrire que :

$\overrightarrow{M_{\bar{s}/s/A}} = \overrightarrow{M_{1/2/A}} + \overrightarrow{M_{0/3/A}} + \overrightarrow{M_{r/3/A}} = \vec{0}$ avec $\overrightarrow{M_{1/2/A}} = \overrightarrow{M_{1/2/B}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{1/2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \cdot 10^3 \cdot r \end{pmatrix}$

proj/z : $24 \cdot 10^3 \cdot r + 0 + N_{r/3} = 0$; alors : $N_{r/3} = -24 \cdot 10^3 \cdot 0,1 = -2400\,Nm$; donc : $\{\tau_{r/3}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2400 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

6- Si *x* es t le déplacement vertical de la charge lors du freinage et θ_3 l'angle de rotation du tambour 3 du treuil, on peut écrire que : $x = \theta_3 \cdot \frac{d}{2}$ d'où : $\theta_3 = \frac{2x}{d} = \frac{2 \cdot 0,01}{0,2} = 0,1\,rad$

Si θ_1 est l'angle de rotation des disques 1 pendant le freinage et si *k* est le rapport de réduction du réducteur, on peut écrire que : $\theta_3 = k\theta_1$ d'où : $\theta_1 = \frac{\theta_3}{k} = \frac{0,1}{0,1} = 1\,rad$

7- Le rendement du réducteur a pour expression : $\eta = \frac{\text{énergie fournie à l'arbre } 23}{\text{énergie reçue du tamboure } 3}$ (1)

L'énergie fournie à l'arbre 23 a pour expression $W_{23} = M_{23} \cdot \theta_{23}$

L'énergie reçue du tambour 3 a pour expression $W_3 = N_{3/r} \cdot \theta_3$

La relation (1) s'écrit alors : $\eta = \frac{M_{23} \cdot \theta_{23}}{N_{3/r} \cdot \theta_3}$ d'où $M_{23} = \frac{\eta \cdot N_{3/r} \cdot \theta_3}{\theta_{23}}$ (2)

L'arbre 23 et les disques 1 sont liés en rotation, donc : $\theta_{23} = \theta_1 = 1\,rad$ (question 6)

La relation (2) permet d'écrire $M_{23} = \frac{0,8 \cdot 2400 \cdot 0,1}{1} = 192\,N.m$

Le PFD appliqué à l'ensemble en rotation S lié à l'arbre 23 et aux disques 1 au point D par rapport à l'axe z, permet d'écrire $\overline{M_{\bar{s}/s/D}} = I_{(D,\vec{z})} \cdot \theta_1''$; Par hypothèse on néglige l'inertie des masses tournantes,

d'où : $\overline{M_{\bar{s}/s/D}} = 0$. Soit M_f le moment de freinage appliqué sur les disques 1. On néglige le frottement dans les paliers de guidage de l'ensemble S, il s'ensuit que : $\overline{M_{\bar{s}/s/D}} = M_{23} + M_f = 0$;D'où $M_f = -M_{23} = -192\,N \cdot m$

8- En admettant que M_f est constant pendant le freinage l'énergie dissipée dans le frein a pour expression :

$W_f = M_f \cdot \theta_1 = -192 \cdot 1 = -192\,J$

Rep : Ex16

1- $m\dfrac{d\overrightarrow{V_C}}{dt} = m\cdot\vec{g} + \vec{T} = (T - m\cdot g)\vec{y}$ et le mouvement de C est vertical

(C est initialement immobile et cette portion de fil verticale) $\quad m\dfrac{dV_C}{dt} = T - m\cdot g \quad (1)$

2- Pour le cylindre, C est son centre de masse : $\overrightarrow{\delta_{cyl,C}} = \dfrac{1}{2}m\cdot a^2\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{x} = \overrightarrow{CC}\wedge m\cdot\vec{g} + \overrightarrow{CA}\wedge T\cdot\vec{y} = -a\cdot T\cdot\vec{x}$

$$\frac{1}{2}m\cdot a\cdot\ddot{\theta} = -T \quad (2)$$

3- Il y a roulement sans glissement en A : $\overrightarrow{V_{A,fil}} = V_A\cdot\vec{y} = \overrightarrow{V_{A,Cyl}} = \overrightarrow{V_C} + \overrightarrow{AC}\wedge\dot{\theta}\cdot\vec{x} = (V_C - a\cdot\dot{\theta})\vec{y}$

$V_A = V_C - a\cdot\dot{\theta} \quad (3)$ Le fil est inextensible, le cube en translation : si $\overrightarrow{V_G} = \overrightarrow{V_B} = V_f\cdot\vec{x}$

alors $V_f = -V_A$ soit $V_A = -V_f = V_C - a\cdot\dot{\theta}$

4- Le fil est sans masse, la tension dans le fil est uniforme. Soit $M\dfrac{dV_f}{dt} = T - Mg\sin\alpha \quad (4)$

5- $M\dfrac{dV_f}{dt} = T - Mg\sin\alpha = -M\dfrac{dV_C}{dt} + Ma\ddot{\theta} = -\dfrac{M}{m}(3T - mg)$

$T = \dfrac{Mm}{3M+m}g(1+\sin\alpha)$ soit $\dfrac{dV_f}{dt} = \dfrac{m - 3M\sin\alpha}{3M+m}g$ et $\dfrac{dV_C}{dt} = \dfrac{M\sin\alpha - 2M - m}{3M+m}g$

L'accélération de C est toujours négative : le mouvement du cylindre est toujours descendant.
Si m > 3M.sinα, le cube remonte, il descend si m < 3M.sinα et immobile si m = 3M.sinα.

Rep Ex17

1- $\overrightarrow{\delta_{Ck}} = \vec{0} = \overrightarrow{C_kC_k}\wedge\overrightarrow{A_{Ck}} + \overrightarrow{C_kI_k}\wedge\overrightarrow{R_k} = RT_k\vec{z}$ donc $T_k = 0$

2- $M\dfrac{d\overrightarrow{V_A}}{dt} + m\dfrac{d\overrightarrow{V_B}}{dt} = (M = m)\dfrac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \left[-(M+m) + \sum_{k=1}^{4}N_k\right]\vec{y}$ alors $\dfrac{dV_{Gx}}{dt}$

Le camion étant initialement immobile, le basculement de la benne ne provoque pas de mouvement du centre de masse G du camion suivant la direction horizontale.

3- $M\dfrac{d\overrightarrow{V_{Ax}}}{dt} + m\dfrac{d\overrightarrow{V_{Bx}}}{dt} = 0$ d'où $MV_{Ax} + mV_{Bx} = Cte = 0$ alors $Md + md_{Bx} = Cte = 0$

$d_{Bx} = \alpha(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$ donc : $d = -\dfrac{m}{M}\alpha(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)$

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!