أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول:

1

لدينا الفلكة $(\mathcal{S})$ معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}) : \ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$$

نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :

$$(x^2-2x)+(y^2-4y)+(z^2-6z)-11=0$$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-11=14$

يعني : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1;2;3)$ و شعاعها $R=5$.

2 أ

لدينا : $A(0;-2;0)$ و $B(1;1;-4)$ و $C(0;1;-4)$.

إذن : $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(0;3;-4)$.

و منه :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}3 & 3\\-4 & -4\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}1 & 0\\-4 & -4\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}1 & 0\\3 & 3\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= 0\vec{\imath}-(-4)\vec{\jmath}+3\vec{k}\\ &= 4\vec{\jmath}+3\vec{k}\end{aligned}$$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC) .

فإن : المتجهتان $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعامدتان .

يعني أن : $\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$

يعني : $\begin{pmatrix}x\\y+2\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}=0$

يعني : $0x+4(y+2)+3z=0$ يعني : $4y+3z+8=0$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2 ب

لدينا : $\Omega(1,2,3)$ و $(ABC) : \ 4y+3z+8=0$

إذن : $d\big(\Omega,(ABC)\big)=\dfrac{|0+8+9+8|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}}=\dfrac{25}{\sqrt{25}}=\sqrt{25}=5$

نلاحظ أن : $d\big(\Omega,(ABC)\big)=R$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة $H(\alpha,\beta,\gamma)$

3 أ

علما أن المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ منظمية على المستوى (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) .

بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهتان مستقيميتان .

يعني : $\overrightarrow{\Omega M}=t\,\vec{n}$; $(\exists t\epsilon\mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases}x-1=0t\\y-2=4t\\z-3=3t\end{cases}$; $(t\epsilon\mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases}x=1\\y=4t+2\\z=3t+3\end{cases}$; $(t\epsilon\mathbb{R})$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) .

3 ب

لدينا : $\begin{cases}(ABC) : 4y+3z+8=0\\(\Delta) : \begin{cases}x=1\\y=2+4t\\z=3t+3\end{cases} ; \ (t\epsilon\mathbb{R})\end{cases}$

نعلم أن $H(\alpha,\beta,\gamma)$ هي نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى (ABC) .

إذن : $\boxed{(\Omega H)\perp(ABC)}$ (1)

و نعلم كذلك أن : $\boxed{(\Delta)\perp(ABC)}$ (2) و $\boxed{\Omega\epsilon(\Delta)}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(\Omega H)=(\Delta)$ يعني : $H\epsilon(\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة H ننطلق من النظمة التالية : $\begin{cases}H\epsilon(\Delta)\\H\epsilon(ABC)\end{cases}$

و هذه النظمة تُكافئ : $\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4t+2\\\gamma=3t+3\\4\beta+3\gamma+8=0\end{cases}$; $(t\epsilon\mathbb{R})$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

$$4(4t+2)+3(3t+3)+8=0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على : $t=-1$

نعوض t بالعدد -1 في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases}\alpha=1\\\beta=4(-1)+2=-2\\\gamma=3(-1)+3=0\end{cases}$$

و بالتالي : $H(1;-2;0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوى (ABC) .

3 ج

للتحقق من أن $H(1;-2;0)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$ يكفي أن نتحقق من أن مثلوث إحداثيات النقطة H يحقق كلا من معادلتي المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $\begin{cases}(\mathcal{S}) : \ x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0\\(ABC) : 4y+3z+8=0\end{cases}$

يكفي إذن أن نعوض x و y و z على التوالي بالأعداد 1 و -2 و 0 في معادلتي (ABC) و $(\mathcal{S})$ و نرى هل تتحقق المتساويات .

لدينا : $1^2+(-2)^2+0^2-2\times1-4(-2)-6\times0-11=0$

إذن : $H\,\epsilon\,(\mathcal{S})$

و لدينا كذلك : $4(-2)+3(0)+8=-8+8=0$

إذن : $H\,\epsilon\,(ABC)$

و بالتالي : H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$.

التمرين الثاني:

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}\,z+64=0$

لدينا : $\Delta=\left(-8\sqrt{3}\right)^2-4\times64=-64=(8i)^2$

إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$z_1=\frac{8\sqrt{3}-8i}{2}=4\sqrt{3}-4i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$$

2 أ

لدينا :
$$\begin{cases} aff(A)=a=8i\\ aff(B)=b=4\sqrt{3}-4i\\ aff(C)=c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)\\ aff(M)=z\\ aff(M')=z' \end{cases}$$

و لدينا الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي : $\mathcal{R}_O\left(\frac{4\pi}{3}\right):\begin{array}{ccc}(\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P})\\ M(z) & \longmapsto & M'(z')\end{array}$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$: $(z'-0)=e^{\frac{i4\pi}{3}}(z-0)$

نطلق من الكتابة : $\mathcal{R}(M)=M'$

يعني : $z'=\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)z$

يعني : $z'=\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)z$

يعني : $z'=\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)z$

يعني : $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

2 ب

لدينا : $aff(A)\times\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$=-4i+4\sqrt{3}=aff(B)$

حصلنا إذن على العلاقة التالية : $aff(A)=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times aff(B)$

و هي نفسها الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$

و من تلك الكتابة نستنتج أن : $\mathcal{R}(A)=B$

2 ج

لدينا :
$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{8i-\left(4\sqrt{3}-4i\right)}{2\left(4\sqrt{3}+4i\right)-\left(4\sqrt{3}-4i\right)}$$
$$=\frac{12i-4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+12i}=\frac{4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}i-1\right)}{4\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}i\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}i-1\right)\left(\sqrt{3}i-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3}i-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}i\right)^2-2\left(\sqrt{3}i\right)+1^2}{\left(\sqrt{3}i\right)^2-1}$$
$$=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{-4}=\frac{-2}{-4}+\frac{-2\sqrt{3}i}{-4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{i\pi}{3}}$$

إذن : $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{i\pi}{3}}$

2 د

حصلنا على : $\frac{a-b}{c-b}=e^{\frac{i\pi}{3}}$ يعني : $\begin{cases}\left|\frac{a-b}{c-b}\right|=1\\ \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}|a-b|=|c-b|\\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}BA=BC\\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$

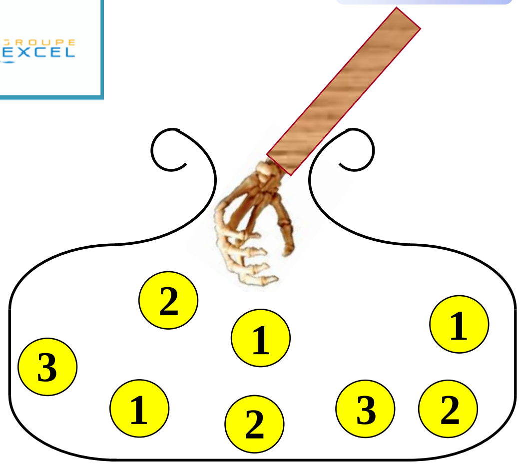
أو بتعبير آخر : $\begin{cases}BA=BC\\ A\hat{B}C=60°\end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

و قياس الزاوية $\hat{B}$ هو $60°$.

و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد C_8^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد C_7^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتمل $C_8^1\times C_7^1$ نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega)=C_8^1\times C_7^1=8\times7=56$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

C_3^1 إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

C_2^1 إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :

$$p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{C_3^1\times C_2^1}{56}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

<u>الحالة الأولى</u> : الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3 بـ $C_2^1\times C_7^1$ إمكانية .

<u>الحالة الثانية</u> : الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3 بـ $C_6^1\times C_2^1$ إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :

$$p(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{C_2^1\times C_7^1+C_6^1\times C_2^1}{56}=\frac{26}{56}=\frac{13}{28}$$

2 أ

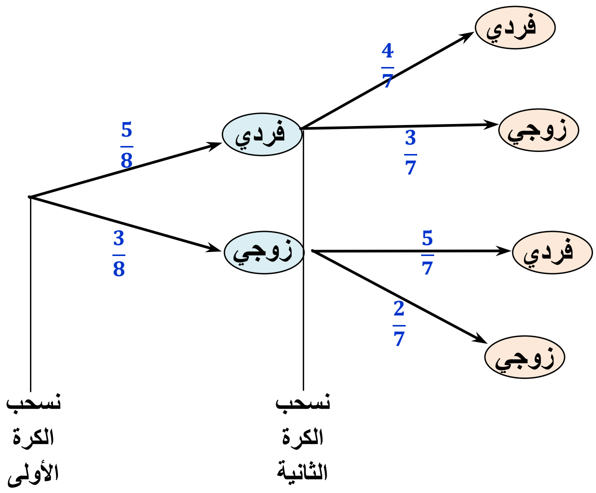
ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا .

و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 أو 1 أو 2
أو بتعبير أجمل : $X(\Omega)=\{0;1;2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تَمَّ الحصول عليها انطلاقا من التجربة العشوائية (السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



2 ب

$p[X=1]$ هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X=1]=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}+\frac{15}{56}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

2 ج

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X التالي :

$P_X\ :\ \{0;1;2\}\longmapsto[0;1]$

لدينا حسب السؤال 1) : $p(A)=\frac{3}{28}$ إذن : $p[X=0]=\frac{3}{28}$

و لدينا كذلك : $p[X=2]=1-p[X=0]-p[X=1]$

$$=1-\frac{3}{28}-\frac{15}{28}=\frac{5}{14}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$P_X\ :\ \{0;1;2\}\longmapsto[0;1]$$
$$0\longmapsto p[X=0]=\frac{3}{28}$$
$$1\longmapsto p[X=1]=\frac{15}{28}$$
$$2\longmapsto p[X=2]=\frac{5}{14}$$

التمرين الرابع :

1

لنبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

لدينا : $u_0=1>0$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

إذن : u_n كمية موجبة قطعا .

و منه فإن الكميتان $3u_n$ و u_n+21 موجبتان قطعا كذلك .

إذن الكمية $\dfrac{3u_n}{u_n+21}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين .

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{3u_n}{21+u_n}>0$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}>0$

يعني أن العبارة (P_{n+1}) عبارة صحيحة .

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$

2

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $u_n>0$ إذن التعبير $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مُعَرَّف . (المقام يجب أن يخالف الصفر)

لدينا : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3u_n}{21+u_n}\times\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{3}{21+u_n}$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3}{21+u_n}$

نعلم أن : $u_n>0$ إذن : $21+u_n>21$

يعني : $\dfrac{1}{21+u_n}<\dfrac{1}{21}$ يعني : $\dfrac{3}{21+u_n}<\dfrac{3}{21}$

يعني : $\dfrac{3}{21+u_n}<\dfrac{1}{7}$ يعني : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\dfrac{1}{7}$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\dfrac{1}{7}\,u_n$

3

نعلم أن : $\frac{1}{7}<1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا u_n نحصل على :

$\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{7}u_n<u_n}$ (1)

و نعلم كذلك حسب السؤال 2) أن : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n}$ (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<u_n$

و بالتالي : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ($u_n>0$) فإنها متقاربة .

4 أ

من أجل $n=0$. لدينا : $u_0=1\leq\left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال 2) : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n\leq\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

4 ب

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن : $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \underset{\substack{\swarrow n\infty \\ 0}}{0} < u_n \le \underset{\substack{\swarrow n\infty \\ 0}}{\left(\frac{1}{7}\right)^n}$

و بالتالي : $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول على الصفر . $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$

التمرين الخامس :

I 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا :

$$\begin{aligned}(x-1)(3x^2+3x+2) &= 3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2\\ &= 3x^3-x-2\end{aligned}$$

I 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$ إذن :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3-x-2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

I 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. يعني : $x > 0$

إذن : $3x^2+3x+2 > 0$ و $x > 0$

و منه : $\frac{3x^2+3x+2}{x}$ موجبة قطعا باعتبارها خارج كميتين موجبتين قطعا .

و بالتالي : $(\forall x > 0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

I 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

و لقد علمنا من قبلُ أن : $(\forall x > 0)\ ;\ \frac{3x^2+3x+2}{x} > 0$

إذن : إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$.

I 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;1]$. إذن : $x \le 1$

يعني : $(x-1) \le 0$ و منه : $g'(x) \le 0$

يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0,1]$.

ليكن x عنصرا من المجال $[1;+\infty[$. إذن : $x \ge 1$

و منه : $(x-1) \ge 0$ يعني : $g'(x) \ge 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

I 3 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x\ \epsilon\ ]0,1]$ يعني : $x \le 1$

إذن : $g(x) \ge g(1)$ (لأن g تناقصية على $]0;1]$)

و لدينا : $g(1) > 0$. إذن : $\boxed{\forall x\ \epsilon\ ]0;1]\ ;\ g(x) > 0}$ **(1)**

الحالة الثانية : $x\ \epsilon\ [1;+\infty[$ يعني : $x \ge 1$

إذن : $g(x) \ge g(1)$ (لأن g تزايدية على $[1;+\infty[$)

و لدينا : $g(1) > 0$. إذن : $\boxed{\forall x\ \epsilon\ [1;+\infty[\ ;\ g(x) > 0}$ **(2)**

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x\ \epsilon\ ]0;+\infty[\ ;\ g(x) > 0$.

II 1

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

إذن :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 + \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2x(x-1+\ln x)}{x^4}\\ &= 1 + \frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}\\ &= 1 + \frac{-x^2+3x-2x\ln x}{x^4} = \frac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3}\end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

نعلم حسب السؤال I (3 ب) : $(\forall x > 0)\ ;\ g(x) > 0$

و لدينا : $(\forall x > 0)\ ;\ x^3 > 0$

إذن : $(\forall x > 0)\ ;\ \frac{g(x)}{x^3} > 0$

يعني : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) > 0$

و بالتالي : f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

II 2 أ

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\left(x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to0^+}\left(x - 1 + \underset{\substack{\swarrow 0^+ \\ +\infty}}{\frac{1}{x}}\left(1 - \underset{\substack{\swarrow 0^+ \\ +\infty}}{\frac{1}{x}} + \underset{\substack{\swarrow 0^+ \\ -\infty}}{\frac{\ln x}{x}}\right)\right)\\ &= 0 - 1 + (+\infty)(1-\infty-\infty)\\ &= -1 + (+\infty)(+\infty) = -1 - \infty = -\infty\end{aligned}$$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسيا هو : " المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار الصفر على اليمين

II 2 ب

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)\\ &= 0(1-0+0) = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(x-1) + \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= (+\infty)+0 = +\infty$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ **(1)**

II 2 ج

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{x-1+\ln x}{x^3}\right)$$
$$= 1-0+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$= 1+0(1-0+0) = 1$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1}$ **(2)**

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= -1+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$
$$= -1+0 = -1$$

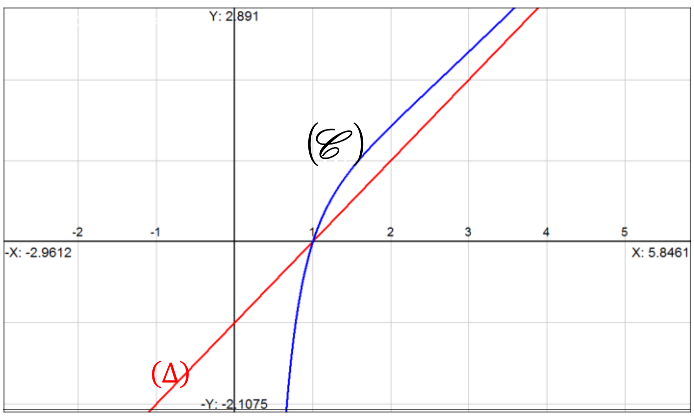
إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = -1}$ **(3)**

من النهايات (**1**) و (**2**) و (**3**) نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 3

معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي زوج إحداثيتيها $(1,0)$
تكتب على الشكل : $(T) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$
لدينا : $f(1) = 0$ و $f'(1) = 3$
إذن : $(T) : y = 3(x-1)$

II 4



II 5 أ

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_{v} dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv\,dx$$
$$= \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$
$$= \frac{-1}{e}-\frac{1}{e}+1 = \boxed{1-\frac{2}{e}}$$

II 5 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.
نقيس المساحة $\mathcal{A}$ باستعمال التكامل التالي :
$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)-(x+1)|\,dx = \int_1^e \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right| dx$$

و لدينا : $x \in [1,e]$ إذن : $\boxed{x > 1}$ **(1)** و منه : $\boxed{\ln x > 0}$ **(2)**

نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد : $x+\ln x > 1$

يعني : $\forall\, x \in [1,e]\ ;\ x-1+\ln x > 0$

و منه : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \dfrac{x-1+\ln x}{x^2} > 0$

أي : $\forall\, x \in [1;e]\ ;\ \left|\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}\right| = \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة $\mathcal{A}$ نجد :
$$\mathcal{A} = \int_1^e \left|\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right| dx = \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right) dx$$
$$= \int_1^e \frac{1}{x}dx - \int_1^e \frac{1}{x^2}dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$$
$$= [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e + \left(1-\frac{2}{e}\right)$$
$$= 1-\left(\frac{-1}{e}+1\right)+\left(1-\frac{2}{e}\right) = \left(1-\frac{2}{e}\right)\ unit\acute{e}^2$$
$$= \left(1-\frac{1}{e}\right)(1\ cm)^2 = \left(1-\frac{1}{e}\right)\ cm^2$$