

## النهايات و الاتصال

### I- النهاية المنتهية

#### 1- النهاية عند $x_0$

#### أ- النهاية 0 عند 0

تمرين

نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  حيث  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = \frac{x^3}{|x|}$

1- (أ) مثل مبيانيا  $f$

(ب) بين مبيانيا أن  $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 / f([- \alpha; \alpha] - \{0\}) \subset ]-\varepsilon; \varepsilon[$

(ج) بين ذلك جبريا

2- (أ) مثل مبيانيا  $g$

(ب) بين مبيانيا أن  $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 / g([- \alpha; \alpha] - \{0\}) \subset ]-\varepsilon; \varepsilon[$

(ج) بين ذلك جبريا

3- أتمم الجدول التالي

$g(x)$	$f(x)$	$x$
		$-10^{-2}$
		$-10^{-5}$
		$-10^{-100}$
////////////////////	////////////////////	0
		$10^{-100}$
		$10^{-5}$
		$10^{-2}$

**ملاحظة:**

نلاحظ كلما اقترب  $x$  من 0 يقترب  $f(x)$  من 0، بل أكثر كلما كان  $x$  يؤول إلى 0 فان  $f(x)$  يؤول إلى 0

نقول إن نهاية  $f$  هي 0 عندما يؤول  $x$  إلى 0

نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

نفس الملاحظة على الدالة  $g$

**تعريف**

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0

نقول إن نهاية  $f$  هي 0 عندما يؤول  $x$  إلى 0 إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**ملاحظة**

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0 \quad *$$

\* إذا كانت  $f$  و  $g$  منطقتين على مجال مفتوح منقط مركزه 0 و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

## خاصية

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} ax^n = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} a\sqrt{x} = 0$$

## خاصية

إذا وجد مجال  $I$  مفتوح منقط مركزه  $0$  بحيث  $|f(x)| \leq u(x)$  و  $\forall x \in I$  كان  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

البرهان

ليكن  $\beta > 0$  و  $I = ]-\beta; \beta[ - \{0\}$

لدينا  $\forall x \in ]-\beta; \beta[ - \{0\} \quad |f(x)| \leq u(x)$

و حيث أن  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  فان  $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |u(x)| < \varepsilon$

نعتبر  $\lambda = \inf(\alpha; \beta)$   $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \lambda \Rightarrow \begin{cases} |u(x)| < \varepsilon \\ |f(x)| \leq u(x) \end{cases}$

وبالتالي  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 0 \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \lambda \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

## تمرين

بين أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

## ب- النهاية ا عند $x_0$

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه  $x_0$  حديسيا:  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $x_0$  عندما يقترب  $x$  من  $x_0$  أي عندما تقترب  $h$  من  $0$  حيث  $h = x - x_0$  فان  $f(x) - l$  تقترب من  $0$  أي  $f(x_0 + h) - l$  تقترب من  $0$

## تعريف

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه  $x_0$  نقول إن نهاية  $f$  هي  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $x_0$  إذا فقط إذا كان نهاية الدالة  $h \rightarrow f(x_0 + h) - l$  هي  $0$  عندما يؤول  $h$  إلى  $0$   
نكتب  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

## ملاحظة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l \quad *$$

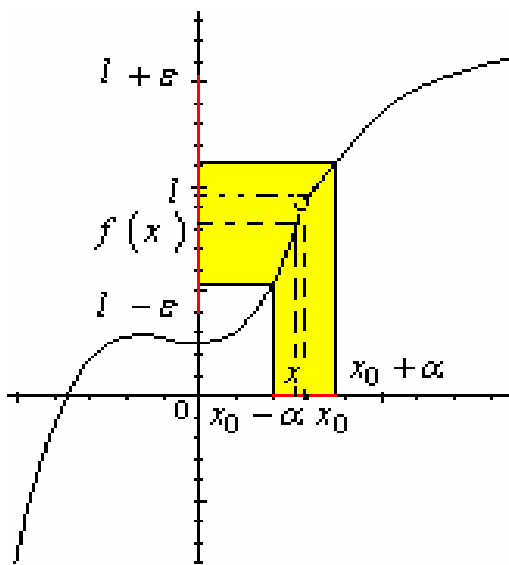
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0 \quad *$$

\* إذا كانت لدالة نهاية عند  $x_0$  فان هذه النهاية وحيدة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0 \quad *$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a(x - x_0)^n = 0 \quad *$$

تمرين بين أن  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-1}{x-3} = 9$



## خاصية

إذا وجد مجال  $I$  مفتوح منقط منقط مركزه  $x_0$  بحيث  $\forall x \in I \quad |f(x) - l| \leq u(x)$  و كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

## تمرين

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \cos \frac{1}{x} = 2 \quad \text{بين أن}$$

## خاصية

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$

## 2- اتصال دالة

### أ- تعريف

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$  تكون  $f$  متصلة في  $x_0$  إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

### أمثلة

الدوال  $x \rightarrow ax^n$  متصلة في  $0$  ( $n \in \mathbb{N}^*$   $a \in \mathbb{R}$ )  
الدوال الثابتة متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها  
الدالة  $x \rightarrow \sqrt{|x|}$  متصلة في  $0$

### اصطلاح

إذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$  و كانت غير متصلة في  $x_0$  فإننا نقول إن  $f$  متقطعة في  $x_0$

## تمرين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

نعتبر  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ

أدرس اتصال  $f$  في 1

### ب- خاصية

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من  $\mathbb{R}$

### البرهان

لتكن  $P$  دالة حدودية و  $x_0$  عنصر من  $\mathbb{R}$

$$P(x) - P(x_0) = (x - x_0)Q(x) \quad \text{حيث } Q \text{ حدودية}$$

نفترض أن

$$|Q(x)| \leq |a_n||x^n| + |a_{n-1}||x^{n-1}| + \dots + |a_1||x| + |a_0| \quad Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ليكن  $M$  أكبر الأعداد  $|a_i|$  حيث  $i \in \{0; 1; \dots; n\}$  ومنه  $|Q(x)| \leq M(|x^n| + |x^{n-1}| + \dots + |x| + 1)$

نفترض أن  $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$  و  $\alpha = \sup(|x_0 - 1|; |x_0 + 1|)$  ومنه  $|x| < \alpha$

$$|Q(x)| \leq M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)$$

نضع  $k = M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)$  ومنه  $|x - x_0||Q(x)| \leq k|x - x_0|$

وبالتالي  $|P(x) - P(x_0)| \leq k|x - x_0|$  وحيث أن  $\lim_{x \rightarrow x_0} k|x - x_0| = 0$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  إذن  $P$  متصلة في  $x_0$

### ج- تطبيقات على حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x - 5} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} |x^2 - 7x - 2| ; \lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 + 4x - 2$$

### د- تمديد بالاتصال

الدالة  $f: x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  غير معرفة في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

ولدينا  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  والدالة  $g$  المعرفة بـ  $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$  تنطبق على  $f$  في  $\mathbb{R} - \{1\}$  ومتصلة في 1

نقول ان  $g$  تمديد بالاتصال لدالة  $f$  في 1

### تعريف

لتكن  $f$  دالة غير معرفة في  $x_0$  لكن لها نهاية  $l$  في  $x_0$  الدالة  $g$  المعرفة بـ  $\begin{cases} g(x) = f(x) & x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$  هي دالة متصلة في  $x_0$  تسمى تمديد بالاتصال لدالة  $f$  في  $x_0$

### تمرين

أعط تمديدا بالاتصال لدالة  $f$  في  $x_0$  في الحالتين

$$\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2} \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

### 3- النهاية على اليمين - النهاية على اليسار

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad (C_f \text{ أنشئ})$$

\* نلاحظ أن قصور الدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$  ينطبق مع قصور الدالة  $g$  حيث  $g(x) = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 3$$

ونعلم أن  $3$  هي نهاية  $f$  على اليمين

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

\* نلاحظ أن قصور الدالة  $f$  على  $]-\infty; 1[$  ينطبق مع قصور الدالة  $h$  حيث  $h(x) = -x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -x - 2 = -3$$

ونعلم أن  $-3$  هي نهاية  $f$  على يسار 1

و نكتب  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -3$  أو  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3$

### تعريف

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من نوع  $]x_0; x_0 + \alpha[$  حيث  $\alpha > 0$   
نقول ان  $f$  تقبل النهاية  $l$  على يمين  $x_0$  إذا كان قصورها على  $]x_0; x_0 + a[$  حيث  $a > 0$  ينطبق مع

دالة معرفة على مجال مفتوح منقط منقط مركزه  $x_0$  تكون نهايتها  $l$  عند  $x_0$  و نكتب  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l \text{ أو}$$

بالمثل نعرف النهاية على اليسار

### خاصية

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

### تمرين

أدرس نهاية الدالة  $f$  في  $x_0$  في الحالتين التاليتين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 2|x|}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 4x + 4 & x > -2 \\ f(x) = 2x^2 + 2x & x \leq -2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

### نتائج

تكون  $f$  متصلة على يمين  $x_0$  إذا فقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

تكون  $f$  متصلة على يسار  $x_0$  إذا فقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

تكون  $f$  متصلة في  $x_0$  إذا فقط إذا كان تكون  $f$  متصلة على يمين  $x_0$  وعلى يسار  $x_0$

### تمرين

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + ax & x > -1 \\ f(x) = -x + 1 & x \leq -1 \end{cases} \quad -1 \text{ حدد } a \text{ لكي تكون } f \text{ متصلة في } -1$$

2- أدرس اتصال  $f$  في  $x_0$  في الحالتين

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ f(x) = x^2 - x & x \leq 0 \end{cases} \quad x_0 = 2 ; \begin{cases} f(x) = 2x + 1 & x > 2 \\ f(x) = x^2 - 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

### 4- الاتصال في مجال

#### تعريف

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $[a; b]$

تكون  $f$  متصلة على  $[a; b]$  إذا فقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من  $]a; b[$

تكون  $f$  متصلة على  $[a; b]$  إذا فقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من  $]a; b[$  ومتصلة على يمين  $a$  و متصلة على يسار  $b$

بالمثل نعرف الاتصال على  $]a; b[$  و على  $]a; b]$

**ملاحظة**

التمثيل المبياني لدالة متصلة على  $]a; b]$  هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين

إحداثيتهما  $(a; f(a))$  و  $(b; f(b))$

**-II- النهاية المنتهية عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$**

**-1- النهاية 0 عند  $+\infty$**

**تمرين**

نعتبر الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x}$

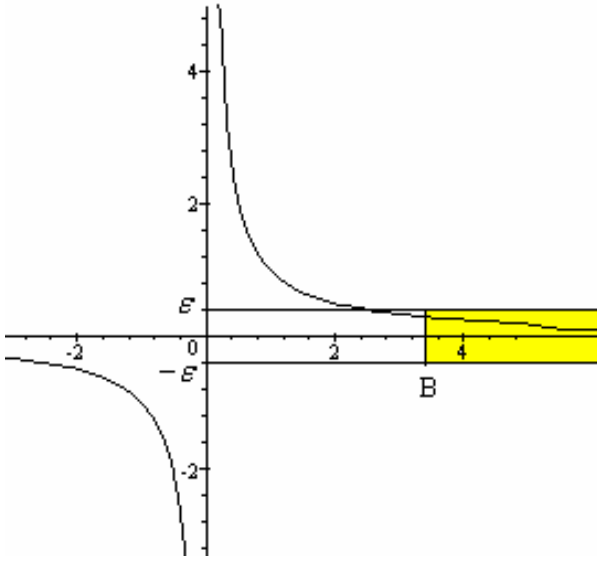
-1- أرسم  $C_f$

-2- أتمم الجدول التالي و ماذا تلاحظ

$x$	$10^{100}$	$10^{10^9}$	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$				

-3- بين أن

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad f(]B; +\infty[) \subset ]-\varepsilon; \varepsilon[$$



-3

ليكن  $\varepsilon > 0$

نبحث عن  $B > 0$  حيث  $x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$$\forall x > 0 \quad |f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$B = \frac{1}{\varepsilon} \text{ نأخذ}$$

للحصول  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

نقول إن  $f(x)$  تؤول إلى 0 عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ نكتب}$$

**تعريف**

لتكن  $f$  يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $]a; +\infty[$

نقول إن  $f(x)$  تؤول إلى 0 عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ نكتب } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

**خاصيات**

## خاصية 1

$$\forall (k; n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$$

## خاصية 2

إذا وجد مجال على شكل  $]a; +\infty[$  بحيث  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$  وكان  $\forall x \in ]a; +\infty[ \quad |f(x)| \leq u(x)$

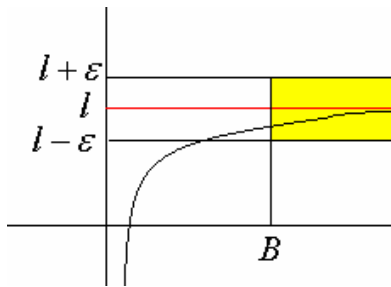
### تمرين تطبيقي

أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{4x^2 + 3}$

حيث  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^2} = 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{4x^2 + 3} = 0$  ومنه  $4x^2 + 3 > x^2$  و  $\left| \frac{7}{4x^2 + 3} \right| \leq \frac{7}{x^2}$

### 2- النهاية $l$ عند $+\infty$

### تعريف



لتكن  $f$  يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $]a; +\infty[$   
نقول إن  $f(x)$  تتوّل إلى  $l$  عندما يؤوّل  $x$  إلى  $+\infty$  إذا فقط  
إذا كان  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$   
نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

### مثال

بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = 1$

### 3- النهاية $l$ عند $-\infty$

### تعريف

لتكن  $f$  يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $]-\infty; a[$   
نقول إن  $f(x)$  تتوّل إلى  $l$  عندما يؤوّل  $x$  إلى  $-\infty$  إذا فقط إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = l$   
نكتب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

### ملاحظات

- إذا كانت  $f$  زوجية فان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
- إذا كانت  $f$  فردية فان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

### III- النهايات المنتهية والترتيب

### خاصيات

## خاصية 1

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح منقط  $I$  مركزه  $x_0$   
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  و  $f$  موجبة على  $I$  فإن  $l \geq 0$

### خاصية 2

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه  $x_0$   
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  بحيث  $l \neq 0$  فإنه يوجد مجال مفتوح منقط  $J$  مركزه  $x_0$  بحيث  $\forall x \in J \quad f(x) \times l > 0$

### خاصية 3

و  $g$  و  $f$  دالتان معرفتان على مجال مفتوح منقط  $I$  مركزه  $x_0$   
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$  و كان  $f \geq g$  على  $I$  فإن  $l \geq l'$

### خاصية 4

و  $g$  و  $h$  دوال معرفة على مجال مفتوح منقط  $I$  مركزه  $x_0$   
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$  وكان  $f \geq h \geq g$  على  $I$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

### IV- العمليات على النهايات المنتهية

و  $g$  دالتان لكل منهما نهاية منتهية في  $x_0$  و  $\lambda$  عدد حقيقي  
الدوال  $f + g$  و  $\lambda f$  و  $f \times g$  و  $|f|$  لها نهاية منتهية في  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \quad \text{إذا كانت } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

ملاحظة الخاصيات تبقى صالحة في  $x_0 = -\infty$  و  $x_0 = +\infty$

### V- العمليات على الدوال المتصلة

#### خاصيات

- \*- مجموع دالتين متصلتين في  $x_0$  هي دالة متصلة في  $x_0$
- \*- جداء دالتين متصلتين في  $x_0$  هي دالة متصلة في  $x_0$
- \*- جداء دالة متصلة في  $x_0$  في عدد حقيقي هي دالة متصلة في  $x_0$
- \*- إذا كانتا  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين في  $x_0$  وكان  $g(x_0) \neq 0$  فإن الدالتين  $\frac{f}{g}$  و  $\frac{1}{g}$  متصلتان في  $x_0$
- \*- إذا كانت  $f$  موجبة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$  ومتصلة في  $x_0$  فإن دالة  $\sqrt{f}$  متصلة في  $x_0$
- \*- إذا كانت  $f$  متصلة وكانت  $x \rightarrow f(ax+b)$  دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه  $x_0$  فإن الدالة  $x \rightarrow f(ax+b)$  متصلة في  $x_0$

#### نتيجة

كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها

تذكير الدالة الجذرية هي خارج دالتين حدوديتين

#### تمارين



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x-2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 5x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6} \quad \text{حدد -1}$$

-2 أدرس اتصال الدوال

$$t(x) = \frac{2x^2 - 3x}{|x|} \quad \begin{cases} h(x) = 2x^2 - x & x > 1 \\ h(x) = -x^2 + 2 & x \leq 1 \end{cases} \quad g(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x-2} \quad f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$$

## VI - الدوال المثلثة

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad \text{نقبل النتيجة}$$

-1 **نهايات واتصال الدوال**  $x \rightarrow \sin x$  و  $x \rightarrow \cos x$  و  $x \rightarrow \tan x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{و} \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad |\sin x| \leq |x| \quad \text{لدينا} \quad *$$

إذن الدالة  $x \rightarrow \sin x$  متصلة في 0 ومنه الدالة  $x \rightarrow \sin(ax+b)$  متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 \quad *$$

إذن  $x \rightarrow \cos x$  متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$x \rightarrow \tan x$  متصلة في 0

\* ليكن  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [\sin x_0 \cosh + \sinh \cos x_0]$$

$$= \sin x_0 \cos 0 + \sin 0 \cos x_0 = \sin x_0$$

إذن دالة  $x \rightarrow \sin x$  متصلة في  $x_0$

## خاصة

الدالتان  $x \rightarrow \sin x$  و  $x \rightarrow \cos x$  متصلتان في  $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{الدالة} \quad x \rightarrow \tan x \quad \text{متصلة في حيز تعريفها}$$

## نتائج

الدالتان  $x \rightarrow \sin(ax+b)$  و  $x \rightarrow \cos(ax+b)$  متصلتان في  $\mathbb{R}$

الدالة  $x \rightarrow \tan(ax+b)$  متصلة في حيز تعريفها

## 2- نهايات اعتيادية هامة

$$\text{نحدد} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{لدينا} \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{|\tan x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|\sin x|} \quad \text{حيث} \quad x \neq 0$$

$$\text{وبالتالي} \quad \frac{|\sin x|}{|\tan x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|\sin x|} \quad \text{أي أن} \quad |\cos x| \leq \frac{|\sin x|}{x} \leq 1$$

$$\text{و حيث أن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \text{و} \quad x \quad \text{و} \quad \sin x \quad \text{لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

\*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 *$$

**خاصية**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**نتيجة**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

**تمرين**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$$

**VII- النهايات اللامنتهية**

**1- النهاية  $+\infty$  أو  $-\infty$  عند  $x_0$**

**تمرين**

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad \text{نعتبر}$$

1- أنشئ  $C_f$

2- أتمم الجدول التالي

$x$	$10^{-100}$	$10^{-10^9}$	$10^{-10^{12}}$	$10^{-10^{100}}$
$f(x)$				

ماذا تلاحظ (بين ذلك)

**تعريف**

\* لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists \alpha > 0) (\forall x \in D_f) \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

**خاصية**

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = +\infty$$

**خاصية**

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = +\infty$$

**خاصية**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{|x^n|} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{\sqrt{|x|}} = +\infty \quad n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad k \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{ليكن}$$

**2- النهاية  $+\infty$  أو  $-\infty$  عند  $+\infty$  أو  $-\infty$**

\* لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال من نوع  $]a; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) (\exists B > 0) \forall x \in D_f \quad x > B \Rightarrow f(x) > A$$

**خاصية**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = +\infty$$

**خاصية**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$$

**النهايات والترتيب**

\* إذا كان لكل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \geq u(x)$  و كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

\* إذا كان لكل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \leq u(x)$  و كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

**ملاحظة** الخاصيات السابقة تبقى صالحة عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  أو عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $x_0$  على اليسار مع تعويض  $I$  على التوالي بالمجالات  $]a; +\infty[$  و  $]-\infty; a[$  و  $]x_0; x_0 + \alpha[$  و  $]x_0 - \alpha; x_0[$  ( $\alpha > 0$ )

**VIII- العمليات على النهايات اللامنتهية**

تعتبر دالتين  $f$  و  $g$ .

عند  $x_0$  أو عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $x_0$  على اليسار أو عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  تكون لدينا النتائج التالية:

**أ- نهاية مجموع**

نهاية $f$	نهاية $g$	نهاية $f + g$
$l \neq 0$	$l$	$+\infty$
$l \neq 0$	$l$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

**ب- نهاية جداء**

نهاية $f$	نهاية $g$	نهاية $f \times g$
$l \neq 0$	$l$	$+\infty$ مع وضع إشارة $l$
$l \neq 0$	$l$	$-\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$
$0$	$+\infty$	شكل غير محدد
$0$	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

**ملاحظة:**

لحساب نهاية  $f \lambda$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}$  يمكن اعتبار  $f \lambda$  كجداء الدالة الثابتة  $\lambda \rightarrow x$  التي نهايتها هي  $\lambda$  و الدالة  $f$

ج- نهاية خارج

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية $g$	نهاية $f$
0	$+\infty$	$l$
0	$-\infty$	$l$
$\infty$ مع وضع إشارة $l$	$0^+$	$l \neq 0$ حيث $l$
$\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$	$0^-$	$l \neq 0$ حيث $l$
شكل غير محدد	0	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
$\infty$ مع وضع إشارة $l$	$l \neq 0$ حيث $l$	$+\infty$
$\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$	$l \neq 0$ حيث $l$	$-\infty$

د- نهاية  $\sqrt{f}$

نهاية $\sqrt{f}$	نهاية $f$
$+\infty$	$+\infty$

IX- تطبيقات

1- دالة القوة الصحيحة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ ليكن}$$

- إذا كان  $n$  زوجي فان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

- إذا كان  $n$  فردي فان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

نتيجة

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ ليكن}$$

2- الدالة الحدودية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_n x^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$$

وحيث  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right] = 1$

نهاية دالة حدودية عند ما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو  $-\infty$  هي نهاية حدها الأعلى درجة

## أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 = +\infty$$

## 3- الدالة الجدرية

نهاية دالة جدرية عند ما يؤول  $x$  الى  $+\infty$  أو  $-\infty$  هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

## أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + 7x^3 - x + 31}{x^9 + 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7}{x^9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^5 - x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5}{3x^5} = \frac{7}{3}$$

## تمارين

حدد النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x + 1} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2} - x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + 3x}{2x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - x} ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 4}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x+1} - 4}$$