

حساب الاحتمالات

العشوائية. وليكن X المتغير العشوائي التي يترابط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

في هذه الحالة، إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقمين 0 و 1 على التوالي فان: $x = 1 + 0 = 1$

و إذا كانتا تحملان الرقمين 1 و 2 على التوالي فان $x = 1 + 2 = 3$ وهكذا نجد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X و هي تكون مجموعة نرمز لها

$$\text{بالرمز } X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\} \text{ في هذا المثال لدينا:}$$

نرمز للحدث: "الحصول على مجموع يساوي 2" بالرمز: $(X = 2)$

قانون احتمال متغير عشوائي: غالبا ما نلخص قانون احتمال X في جدول: لنحدد في المثال السابق قانون احتمال المتغير العشوائي X .

$$\text{لدينا: } X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$$

▪ $(X = 1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0, و على كرة تحمل

$$\text{الرقم 1. إذن } p(X = 1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$$

▪ $(X = 2)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 2, و على كرة تحمل

الرقم 0. أو الحصول على كرتين تحملان الرقم 1.

$$\text{إذن: } p(X = 2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2}$$

▪ $(X = 3)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1, و على كرة

$$\text{تحمل الرقم 2. إذن. } p(X = 3) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

▪ $(X = 4)$ يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم 2, إذن:

$$p(X = 4) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

حساب الأمل الرياضي-المغايرة-الانحراف الطرازي لمتغير عشوائي:

الأمل الرياضي هو:

$$E(X) = \left(1 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4 \times \frac{3}{15}\right) = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

المغايرة هي:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = \left(1^2 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3^2 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4^2 \times \frac{3}{15}\right) - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ الانحراف الطرازي هو:}$$

الاحتمالات المتكررة والمتغير العشوائي الحداني: نعتبر اختبارا بحيث نهنم

فقط بتحقق أو عدم تحقق حدث A ليكن p احتمال الحدث A $p = p(A)$

نكرر هذا الاختبار n مرة متتالية وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A في نفس الظروف لدينا الخاصية التالية:

خاصية: احتمال تحقق الحدث A k مرة بالضبط

هو: $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ لكل k من $\{0; 1; 2; \dots; n\}$

X يسمى لمتغير عشوائي حداني وسيطاه هما: n و p

$$\text{ولدينا: } E(X) = n \times p \text{ و } V(X) = n \times p \times (1-p)$$

المبدأ: لتكن E تجربة تتطلب نتائجها k اختيارا.

إذا كان الاختيار الأول يتم بـ n_1 طريقة مختلفة, والاختيار الثاني يتم بـ n_2

طريقة مختلفة... والاختيار k يتم بـ n_k طريقة مختلفة. فان عدد النتائج الممكنة

هو الجداء: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$.

عدد عناصر مجموعة منتهية E يسمى رئيسي E ونرمز له بـ $Card E$.

خاصيات: لكل n من \mathbb{N}^* , و لكل p من \mathbb{N} بحيث $0 \leq p \leq n$, لدينا:

- عدد التبديلات ل n عنصر من بين n هو:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \text{ نضع } 0! = 1.$$

ليكن n و p عنصرين من \mathbb{N}^* .

▪ عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n هو n^p .

▪ عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصرا. له بالرمز A_n^p و

$$\text{لدينا: } A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

▪ عدد التآليفات ل p عنصر من بين n هو $\frac{A_n^p}{p!}$, ونرمز له بالرمز C_n^p

$$\text{ولدينا } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ و } C_n^p = C_n^{n-p} \text{ و } C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

$$\text{و } C_n^0 = 1 \text{ و } C_n^n = 1 \text{ و } C_n^{n-1} = n \text{ و } C_n^1 = n$$

ملاحظة:

• عند السحب بالتتابع وبدون إحلال نستعمل الرمز A_n^p

• عند السحب الآني نستعمل الرمز C_n^p

• عند السحب بالتتابع وبإحلال نستعمل الرمز مبدأ الجداء

خاصية: ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية:

$$p(\Omega) = 1 \text{ و } p(\phi) = 0$$

$$0 \leq p(A) \leq 1, A \text{ لكل حدث}$$

• وكل حدثين غير منسجمين A و B (أي $A \cap B = \phi$)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$\text{لكل حدث } A \text{ لدينا: } p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

• لكل حدثين A و B لدينا:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

• إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون

$$\text{إمكانيتها } \Omega, \text{ فان احتمال كل حدث } A \text{ هو: } p(A) = \frac{Card A}{Card \Omega}$$

الاحتمال الشرطي: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

بحيث $P(A) \neq 0$. احتمال الحدث B , علما أن الحدث A محقق. هو العدد

الذي نرمز له بالرمز $p_A(B)$ أو $p(B/A)$.

$$\text{ولدينا: } p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

استقلالية حدثين: لقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا

$$\text{كان: } p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

المتغيرات العشوائية- قانون احتمال متغير عشوائي: مثال: يحتوي صندوق على 6

كرات تحمل الأرقام: 0, 1, 1, 2, 2, 2, لا يمكن التمييز بينها باللمس. ونسحب

عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

الأستاذ : نجيب عثمانى