سلسلة تمارين حول المتتاليات العددية

تمرين1: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 6 \quad ; \forall n \geq 1 \end{cases}$.

1. أحسب u_2 و u_3.

لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة بما يلي: $v_n = u_n + 18$.

2. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
3. حدد v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n
4. أحسب $\lim u_n$.

تمرين2: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_1 = \frac{11}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{4} \end{cases}$.

و نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $\forall n \geq 1 \; ; \; v_n = -1 + 2u_n$.

1. أحسب v_1.
2. برهن أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
3. عبر عن v_n و u_n بدلالة n.

تمرين3: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 0; \quad u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$.

برهن بالترجع أن: $\forall n \geq 0; \quad u_n = 3 - 2^n$.

تمرين4: نضع: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3.
2. برهن بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n \neq -1$.
3. نضع : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

a) بين أن متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.
b) أحسب v_n بدلالة n ثم أحسب : $\lim v_n$.
c) أحسب u_n بدلالة n ثم أحسب : $\lim u_n$.

تمرين5: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. بين أن: $\forall n \geq 0; \quad u_n \geq 2$.
2. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.
3. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.
4. أحسب $\lim u_n$.

تمرين6: نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. أحسب u_2 و u_3.

2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $v_n = u_n - 3$.

أ. برهن أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

ب. عبر عن v_n بدلالة n ثم عن u_n بدلالة n.

ج. أحسب $\lim v_n$ ثم $\lim u_n$.

تمرين7: نعتبر المتتالية المعرفة كالآتي : $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \ ; \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$، و المتتالية المعرفة ب:

$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \ ; \ \ \forall n \in \mathbb{N}$، و المتتالية المعرفة ب: $w_n = 5^n u_n \ ; \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية.

ب. أكتب v_n بدلالة n.

2. أ. بين أن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية.

ب. أكتب w_n بدلالة n.

ج. استنتج u_n بدلالة n.

3. أ. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \ \ 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$.

ب. استنتج أن $\forall n \in \mathbb{N}^*; \ \ 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

ج. أحسب $\lim u_n$.

تمرين8: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{8 + \frac{{u_n}^2}{3}}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. أحسب u_1.

2. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \ \ 0 \leq u_n < 2\sqrt{3}$.

3. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا. ماذا تستنتج ؟.

4. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة ب $\forall n \in \mathbb{N}; \ \ v_n = 12 - {u_n}^2$.

أ. بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول.

ب. أكتب u_n بدلالة n و استنتج $\lim u_n$.

تمرين9: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالآتي: $\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+{u_n}^3}{8}}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \ \ u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$.

2. بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \ \ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ،ماذا تستنتج ؟

3. نضع: $\forall n \in \mathbb{N}; \ \ v_n = \frac{7}{8}{u_n}^3 - \frac{1}{8}$.

a) بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية محددا أساسها.

b) أحسب u_n بدلالة n.

c) أحسب $S_n = \sum_{k=0}^{n} {u_k}^3$ بدلالة n.

تمرين10: نعتبر المتتاليتين المعرفتين كالآتي:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

نضع: $w_n = u_n - v_n \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. بين أن $(w_n)_{\forall n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية و حدد أساسها.
2. أكتب w_n بدلالة n.
3. أحسب $\lim w_n$.
4. أحسب $s_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ ، ثم حدد $\lim s_n$.
5. أكتب $u_{n+1} - u_n$ بدلالة w_n و استنتج u_{n+1} بدلالة n.

تمرين11:

1. أدرس تغيرات الدالة $f(x) = \dfrac{6x+5}{x+2}$ على $I = [1;5]$.
2. نعتبر المتتالية المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_o = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 5}{u_n + 2} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a) بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .

b) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n < 5)$.

c) استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب $\lim u_n$.

تمرين12:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]1,+\infty[$ ب : $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

1. بين أن: $\forall x \in]2.+\infty[; g(x) \geq 3$.
2. لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كالتالي: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{7}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \ ; \quad \forall \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a) بين أن: $u_n \geq 3 \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ رتيبة و استنتج أنها متقاربة .

c) أحسب $\lim u_n$.