مسألة رقم (1)

الجزء (1) : لتكن g الدالة بحيث : $g(x)=(x+1)e^{x}-1$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

2) أ- بين أن $g'(x)=(x+2)e^{x}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g

3) أحسب $g(0)$ و استنتج إشارة $g(x)$

الجزء (2) : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}-1} \quad ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f)

2) أ- بين أن f متصلة في النقطة 0

ب- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f على يمين و على يسار 0

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

4) بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad f(x)<x \Leftrightarrow x\in \left]0,\dfrac{1}{\ln 2}\right[$

5) أسم المنحنى (C_f)

الجزء (3) : لتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$u_{n+1}=f(u_n)$ و $u_0=\dfrac{1}{2}$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<u_n<\dfrac{1}{\ln 2}$

2) بين أن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية

3) استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

مسألة رقم (2)

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{2x}-2x-1$

1) أحسب $g'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات g (1 ن)

2) أ- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)\geq 0$ (0,5 ن)

ب- استنتج أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad e^{2x}-2x\geq 1$ (0,25 ن)

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{e^{2x}-2x}$

1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D=\mathbb{R}$ (0,5 ن)

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ أول هندسيا النتيجة (0,75 ن)

ب- تحقق أن $f(x)=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{e^{2x}}{2x}-1\right)}$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

أعط تأويلا هندسيا النتيجة (0,75 ن)

3) أ- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=\dfrac{(1-2x)e^{2x}}{\left(e^{2x}-2x\right)^2}$ (0,5 ن)

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f (0,5 ن)

4) أ- أكتب معادلة المماس ل (C_f) في النقطة $x_0=0$ (0,25 ن)

ب- تحقق أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)-x=\dfrac{-xg(x)}{e^{2x}-2x}$ (0,25 ن)

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta)\ y=x$

5) أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) (نأخذ $\dfrac{1}{2(e-1)}=0,3$)

(III) لتكن $(U_n)_n$ متتالية معرفة بما يلي :

$U_{n+1}=f(U_n)$ و $U_0=-1$

1) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad -1\leq U_n\leq 0$ (0,5 ن)

2) بين أن $(U_n)_n$ متتالية تزايدية (0,25 ن)

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها (0,5 ن)

استدراكية 2008

(1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{2x}-2x$

1) أحسب $g'(x)$ ثم أدرس منحنى تغيرات الدالة g

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$ (لاحظ أن $g(0)=1$)

(2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\ln(e^{2x}-2x)$$

1) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ب- تحقق أن

$$(\forall x\in\mathbb{R}^*)\quad \frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{e^{2x}-2x}$$

ج- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أ- تحقق أن $1-\dfrac{2x}{e^{2x}}>0$ لكل x من $\mathbb{R}^+$

و أن $f(x)=2x+\ln\left(1-\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج- بين أن $f(x)-2x\leq 0$ لكل x من $\mathbb{R}^+$ و استنتج أن المنحنى (C_f) يوجد تحت المستقيم $(D)\ y=2x$ على $\mathbb{R}^+$

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أسم المنحنى (C_f) و المستقيم $(D)\ y=2x$