الأستاذ: نجيب عثماني

تمارين محلولة:الأعداد العقدية" الجزء الأول"

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية الجهة الشرقية

تمرين1: أكتب الأعداد العقدية التالية على شكلهم الجبري أو الديكارتي:

$z_1=(2+i)(-1+i)+(1+2i)^2$ و $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

$z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}$ و $z_4=\dfrac{1+i}{3-i}$ و $z_5=(1+i)^{10}$

أجوبة : 1)

$z_1=(2+i)(-1+i)+(1+2i)^2=-2+2i-i-1+1+4i-4$

$z_1=-6+5i=a+bi$ ومنه : $\mathrm{Re}(z_1)=-6$ و $\mathrm{Im}(z_1)=5$

2) $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=1^3+3\times1^2\times\left(\sqrt{3}i\right)+3\times1\times\left(\sqrt{3}i\right)^2+\left(\sqrt{3}i\right)^3$

$z_2=1+3\sqrt{3}i-3\times3-3\sqrt{3}i=-8+0i\in\mathbb{R}$ عدد حقيقي

لأن : $\mathrm{Im}(z_2)=0$

3) $z_3=\dfrac{1-3i}{3-i}=\dfrac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i-9i+3}{9-i^2}=\dfrac{6-8i}{10}$

$z_3=\dfrac{6}{10}-\dfrac{8i}{10}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4i}{5}$ ومنه : $\mathrm{Re}(z_1)=\dfrac{3}{5}$ و $\mathrm{Im}(z_1)=-\dfrac{4}{5}$

4) $z_4=\dfrac{1+i}{3-2i}=\dfrac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{3+2i+3i-2}{9-4i^2}=\dfrac{1+5i}{13}=\dfrac{1}{13}+i\dfrac{5}{13}$

5) $z_5=(1+i)^{10}=\left((1+i)^2\right)^5=(2i)^5=(2)^5\times(i)^5=32\times(i)^4\times i=32i$

تمرين2: نعتبر في المستوى العقدي النقط. $A(-2;1)$ و $B(-3;-1)$ و $C\left(\dfrac{1}{2};-2\right)$.

ما ألحاق النقط A و B و C؟

الأجوبة: لحق النقطة A هو العدد العقدي $z_A=-2+i\cdot1$ أي

$z_A=-2+i$

لحق النقطة B هو العدد العقدي $z_B=-3+i\cdot(-1)$ أي

$z_A=-3-i$

لحق النقطة C هو العدد العقدي $z_A=\dfrac{1}{2}-2i$

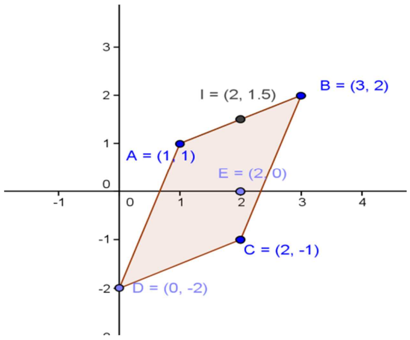
تمرين3: نعتبر في المستوى العقدي النقط A, B, C, D و E

الحاقهم على التوالي: $z_A=1+i$ و $z_B=3+2i$

$z_C=2-i$ و $z_D=-2i$ و $z_E=2$

1. مثل النقط A, B, C, D و E في المستوى العقدي
2. حدد z_I لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$
3. حدد $z_{\overrightarrow{AB}}$ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$
4. بين أن الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

الأجوبة:(1



2) I منتصف القطعة $[AB]$ يعني $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

يعني $z_{\overrightarrow{AI}}=z_{\overrightarrow{IB}}$ يعني $z_I-z_A=z_B-z_I$ يعني $z_I=\dfrac{z_B+z_A}{2}$

ومنه : $z_I=\dfrac{3+2i+1+i}{2}=2+\dfrac{3}{2}i$ ومنه : $I\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$

ملاحظة: يمكننا استعمال القاعدة التالية مباشرة : $z_I=\dfrac{z_B+z_A}{2}$

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=3+2i-(1+i)=3+2i-1-i=2+i$

4) يكفي أن نبين أن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}}=2+i$ نحسب $z_{\overrightarrow{DC}}=?$

$z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=2-i-(-2i)=2+i$

ومنه : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ ومنه : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ وبالتالي : ABCD متوازي الأضلاع

تمرين4: نعتبر النقط : $A(1+i)$ و $B\left(\dfrac{1}{2}+2i\right)$ و $C(-1-i)$

هل النقط A و B و C مستقيمية؟

الجواب : $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{\frac{1}{2}+2i-i}{-1-i-i}=\dfrac{\frac{1}{2}+i}{-1-2i}=\dfrac{\frac{1}{2}+i}{-2\left(\frac{1}{2}+i\right)}=-\dfrac{1}{2}\in\mathbb{R}$

اذن : النقط A و B و C مستقيمية

تمرين5: $z_1=5-2i$ و $z_2=3+2i$ و $z_3=-5-3i$ و $z_4=2i$

$z_5=-7$ $\quad$ $z_6=-5-3i+i(2-i)$

الأجوبة: $z_1=5-2i$ اذن : $\overline{z_1}=\overline{5-2i}=5+2i$

$z_2=3+2i$ اذن : $\overline{z_2}=\overline{3+2i}=3-2i$

$z_3=-5-3i$ اذن : $\overline{z_3}=\overline{-5-3i}=-5+3i$

$z_4=2i$ اذن : $\overline{z_4}=\overline{2i}=-2i$

$z_5=-7i$ اذن : $\overline{z_5}=\overline{-7+0\times i}=-7$

$z_6=-5-3i+i(2-i)$

يعني : $z_6=-5-3i+2i-i^2=-5-3i+2i+1=-4-i$

$z_6=-4-i$ اذن : $\overline{z_6}=\overline{-4-i}=-4+i$

تمرين6: ليكن z عددا عقديا.

حدد وأكتب بدلالة $\overline{z}$ مرافقات الأعداد العقدية التالية:

$Z_1=(2+i)(5-i)$ و $Z_2=2z+5i$ و $Z_3=\frac{z-1}{-3z+i}$.

أجوبة : 1) $\overline{Z_1}=\overline{(2+i)(5-i)}=\overline{(2+i)}\times\overline{(5-i)}=(2-i)(5+i)$

$\overline{Z_2}=\overline{2z+5i}=\overline{2z}+\overline{5i}=2\overline{z}-5i$

$$\overline{Z_3}=\overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i}\right)}=\frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}}=\frac{\overline{z}-1}{-3\overline{z}-i}$$

تمرين7: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين:

1. $2z+i\overline{z}=5-4i$
2. $z=2\overline{z}-2+6i$

أجوبة : 1) $z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث : $z=x+yi$

$2(x+yi)+i(x-yi)=5-4i \Leftrightarrow 2z+i\overline{z}=5-4i$

$$\begin{cases}2x+y=5\\2y+x=-4\end{cases}\Leftrightarrow(2x+y)+i(2y+x)=5-4i\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2x+y=5\\-3y=13\Leftrightarrow y=-\frac{13}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x+2x+y=8+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=5\\-4y-2x=8\end{cases}\Leftrightarrow$$

وبتعويض y بقيمتها في المعادلة 1 نجد : $x=\frac{14}{3}$

ومنه: $S=\left\{\frac{14}{3}-\frac{13}{3}i\right\}$

2) بنفس الطريقة نستعمل الكتابة الجبرية : $z=x+yi$ فنجد :

$x+yi=2(x-yi)+-2+6i \Leftrightarrow z=2\overline{z}-2+6i$

$$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=-2\\3y=6\end{cases}\Leftrightarrow -x+3iy=-2+6i\Leftrightarrow$$

ومنه: $S=\{2+2i\}$

تمرين8: نعتبر في المستوى العقدي العدد العقدي U

ولتكن M صورة العدد العقدي z ونضع :

$$U=(z-2i)(\overline{z}-1)$$

نضع : $z=x+yi$ حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$

1) حدد بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد العقدي U

2) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون:

أ) U عددا حقيقيا

ب) U عددا تخيلي صرف

أجوبة : 1) $z=x+yi$ اذن : $U=(x+yi-2i)(x-yi-1)$

يعني $U=(x+i(y-2))((x-1)-yi)$ وبعد النشر نجد :

$$U=(x^2+y^2-x-2y)+i(-y-2x+2)$$

ومنه : : $\text{Re}(U)=x^2+y^2-x-2y$ و $\text{Im}(U)=-y-2x+2$

2)أ) U عدد حقيقي يعني $\text{Im}(U)=0$ يعني $(\Delta):-y-2x+2=0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته: $-y-2x+2=0$

ب) U عدد تخيلي صرف يعني $\text{Re}(U)=0$ يعني $x^2+y^2-x-2y=0$

$$x^2-2\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2\times1y+1^2-1^2=0\Leftrightarrow x^2+y^2-x-2y=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow$$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها

$\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$: وشعاعها $R=\frac{\sqrt5}{2}$

تمرين9: حدد معيار الأعداد التالية : $z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt3}{2}$ و

$z_2=-\sqrt2-i$

$z_3=3-4i$ و $z_4=-2i$ و $z_5=-4$

أجوبة : $|z_1|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt3}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt1=1$

$$|z_2|=|-\sqrt2-i|=\sqrt{(-\sqrt2)^2+(-1)^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt3$$

$$|z_3|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5;|-2i|=\sqrt{(-2)^2}=2$$

$$|z_4|=|-2i|=|0-2i|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=\sqrt4=2$$

$$|z_5|=|-4|=|-2+0i|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}=4$$

تمرين10: نعتبر في المستوى العقدي $(o;i,j)$ النقط C , B, A

ألحاقهم على التوالي: $z_A=2$ و $z_B=1+\sqrt3 i$ و $z_C=3+i\sqrt3$

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

الجواب : يكفي أن نبين أن $AC=AB=BC$:

$$AB=|z_B-z_A|=|1+\sqrt3 i-2|=|-1+\sqrt3 i|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt3^2}=\sqrt4=2$$

$$AC=|z_C-z_A|=|3+\sqrt3 i-2|=|1+\sqrt3 i|=\sqrt{(1)^2+\sqrt3^2}=\sqrt4=2$$

$$BC=|z_C-z_B|=|3+\sqrt3 i-1-\sqrt3 i|=|2|=2$$

ومنه : $AC=AB=BC$ وبالتالي : المثلث ABC متساوي الأضلاع.

تمرين11: حدد معيار كل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1=5(1+i\sqrt3)$ و $z_2=(1+i)(\sqrt3-i)$ و $z_3=\left(\frac{1+i\sqrt3}{1-i}\right)^3$

الجواب : $|z_1|=|-5(1+i\sqrt3)|=|-5||1+i\sqrt3|=5\sqrt{1+3}=10$

$$|z_2|=|(1+i)(\sqrt3-i)|=|1+i|\times|\sqrt3-i|=\sqrt2\times\sqrt4=2\sqrt2$$

$$|z_3|=\left|\left(\frac{1+i\sqrt3}{1-i}\right)^3\right|=\left|\frac{1+i\sqrt3}{1-i}\right|^3=\left(\left|\frac{1+i\sqrt3}{1-i}\right|\right)^3=\left(\frac{|1+i\sqrt3|}{|1-i|}\right)^3$$

$$|z_3|=\left(\frac{\sqrt4}{\sqrt2}\right)^3=(\sqrt2)^3=2\sqrt2$$

تمرين12: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها. z بحيث:

$$|z-1-2i|=|z-7+2i|$$

الجواب :طريقة 1: (طريقة تحليلية)

$z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث : $z=x+yi$

$|z-1-2i|=|z-7+2i|$ يعني $|x+yi-1-2i|=|x+yi-7+2i|$

يعني $|x-1+i(y-2)|=|x-7+i(y+2)|$

يعني $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y+2)^2}$

يعني $(x-1)^2+(y-2)^2=(x-7)^2+(y+2)^2$

يعني $x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2-14x+49+y^2+4y+4$

يعني $12x-8y-48=0$

يعني $(\Delta): 3x-2y-12=0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته: $3x-2y-12=0$

طريقة2:(طريقة هندسية)

$|z-1-2i|=|z-7+2i|$ يعني $|z-(1+2i)|=|z-(7-2i)|$

نضع: $A(z_A=1+2i)$ و $B(z_B=7-2i)$

اذن: $|z_M-z_A|=|z_M-z_B|$ يعني $AM=BM$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) واسط القطعة $[AB]$

تمرين13: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$|z-2i|=3$

الجواب :طريقة 1:(طريقة تحليلية)

$z\in\mathbb{C}$ يعني $\exists x\in\mathbb{R}$ و $\exists y\in\mathbb{R}$ بحيث : $z=x+yi$

$|z-2i|=3$ يعني $|x+yi-2i|=3$ يعني $|x+i(y-2)|=3$

يعني $\sqrt{x^2+(y-2)^2}=3$ يعني $(x-0)^2+(y-2)^2=3^2$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركز ها: $\Omega(0;2)$ وشعاعها $R=3$

طريقة2:(طريقة هندسية)

$|z-2i|=3$ نضع : $A(z_A=2i)$

اذن: $|z_M-z_A|=3$ يعني $AM=3$

اذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركز ها A: وشعاعها $R=3$

تمرين14: نعتبر النقط A و B و C و D و E و F التي ألحاقها على التوالي:

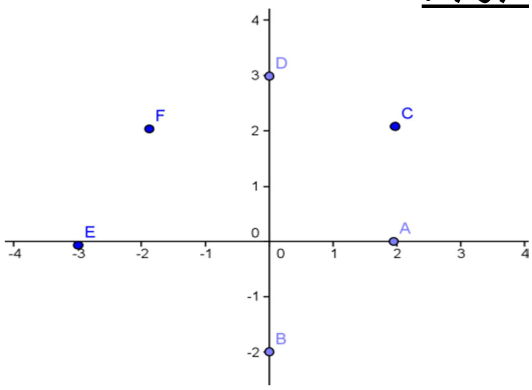
$z_A=2$ و $z_B=-2i$ و $z_C=2+2i$ و $z_D=3i$

$z_E=-3$ و $z_F=-2+2i$

أنشئ النقط A و B و C و D و E و F

باستعمال التمثيل في المستوى العقدي حدد عمدة كل عدد من الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D و z_E و z_F

الجواب :



$\arg z_A=0[2\pi]$ و $\arg z_B=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_C=\frac{\pi}{4}[2\pi]$ و $\arg z_D=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_E=\pi[2\pi]$ و $\arg z_F=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

ملاحظات مهمة:

- $z\in\mathbb{R}^{*+}\Leftrightarrow \arg z\equiv 0[2\pi]$
- $z\in\mathbb{R}^{*-}\Leftrightarrow \arg z\equiv \pi[2\pi]$
- $\arg z=k\pi;k\in\mathbb{Z}$ أو $z=0 \Leftrightarrow k\in\mathbb{R}$.
- إذا كان $y\succ 0$ فإن: $\arg(iy)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- إذا كان $y\prec 0$ فإن: $\arg(iy)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $\arg(-z)\equiv\pi+\arg z[2\pi]$
- $\arg\bar{z}\equiv-\arg z[2\pi]$

تمرين15: حدد عمدة العدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية: $z_1=5i$ و $z_2=-1$.

$z_3=-3i$ و $z_4=2$

أجوبة : $\arg z_2=\pi[2\pi]$ و $\arg z_1=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_4=0[2\pi]$ و $\arg z_3=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

تمرين16: حدد شكلا مثلثيا للأعداد العقدية التالية

$z_1=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=1-i$ $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i$ و $z_4=-1-\sqrt{3}i$

أجوبة : 1) لدينا: $|z_1|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$$z_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

2) لدينا: $|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$z_1=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) لدينا: $|z_3|=\sqrt{\frac{3}{36}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$z_3=-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(\pi-x)=-\cos x$ و $\sin(\pi-x)=\sin x$

اذن : $z_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

4) لدينا: $|z_4|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

$$z_4=-1-\sqrt{3}i=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(\pi+x)=-\cos x$ و $\sin(\pi+x)=-\sin x$:

اذن : $z_4=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

تمرين17: حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1=\sqrt{3}+3i$ $z_2=-2+2i$.

. $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_4=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$

أجوبة : 1) لدينا: $|z_1|=\sqrt{\sqrt{3}^2+3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$$z_1=\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+i\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$z_1 = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$z_2 = -2+2i$ (2

لدينا: $|z_2| = |-2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$z_2 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(\pi-x) = -\cos x$ و $\sin(\pi-x) = \sin x$

اذن :

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3

لدينا: $|z_3| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

$$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\, z_1 = 1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(\pi+x) = -\cos x$ و $\sin(\pi+x) = -\sin x$

اذن : $z_3 = 1\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ (4

لدينا: $|z_4| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_4 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

اذن : $z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

تمرين18:

نعتبر العددين العقديين $z_1 = \sqrt{3} - i$ و $z_2 = 1 - i$ و $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1. أعط شكلا مثلثيا لكل من z_1 و z_2 و Z .
2. أكتب Z على الشكل الجبري ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الأجوبة: (1 $z_1 = \sqrt{3} - i$

لدينا: $|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

اذن : $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

لدينا: $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

اذن : $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

(2 $$Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

يعني $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

تمرين19:

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي:

$z_A = 3+5i$ و $z_B = 3-5i$ و $z_C = 7+3i$

1)بين أن: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

2)استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية و أن $BC = 2AC$

الجواب : (1 $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{2i(-4+2i)}{-4+2i} = 2i$

(2 $\overline{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)[2\pi]$

$\overline{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \arg(2i)[2\pi]$ يعني $\overline{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

اذن المثلث ABC قائم الزاوية في C

وجدنا أن : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$ اذن : $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |2i|$

اذن : $\frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2$ اذن : $\frac{BC}{AC} = 2$ اذن : $BC = 2AC$

خاصيات مهمة :

(1 $z' = z + z_{\vec{u}}$ الكتابة العقدية للإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $z_{\vec{u}}$

(2 $z_{M'} = kz_M + z_\Omega(1-k)$ هي الكتابة العقدية للتحاكي h الذي مركزه Ω ونسبته k

(3 $z_{M'} = e^{i\alpha}(z_M - z_\Omega) + z_\Omega$ هي الكتابة العقدية للدوران r الذي مركزه Ω وزاويته α

تمرين20:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي

: $z_A = 3+5i$; $z_B = 3-5i$; $z_C = 7+3i$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$

1. بين أن : $z' = z+4-2i$ وتسمى الكتابة العقدية للإزاحة
2. تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T
3. حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة T

الجواب: (1 $z' = z + 4 - 2i \Leftrightarrow z' = z + z_{\vec{u}}$

2)نعوض z ب $z_A = 3+5i$ فنجد : $z' = 3+5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z' = 7+3i = z_C$ ومنه C هي صورة النقطة A بالإزاحة T

3) نعوض z ب $z_B = 3-5i$ فنجد : $z' = 3-5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z' = 7-7i = z_{B'}$ ومنه لحق النقطة B' هو $z_{B'} = 7-7i$

تمرين21: نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega(3;-2)$ ونسبته $k=4$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي h ونعتبر النقطة A التي لحقها $z_A = 3+5i$

1. بين أن : $z' = 4z-9+6i$ وتسمى الكتابة العقدية للتحاكي
2. حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالتحاكي h

الجواب : 1) $z_{M'} = kz_M + z_\Omega(1-k) \Leftrightarrow$

$z' = 4z + z_\Omega(1-4)$

$\Leftrightarrow z' = 4z-3(3-2i) \Leftrightarrow z' = 4z-9+6i$

2) نعوض Z ب $z_A = 3+5i$ في : $z' = 4z-9+6i$

فنجد $z' = 4(3+5i)-9+6i$ ومنه لحق النقطة A' هو

$z_{A'} = 3+26i$

تمرين22: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطتين A و B التي لحقهما على التوالي

هي : $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M'

صورة النقطة M بالدوران r **الذي مركزه** B **وزاويته** $\frac{\pi}{2}$

1. بين أن : $z' = iz+4i+12$ وتسمى الكتابة العقدية للدوران r
2. بين أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران r **هو** $z_C = 10+11i$

الجواب : 1) $r(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = e^{i\alpha}(z_M - z_B) + z_B$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-4-8i)+4+8i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-4-8i)+z$

$z' = i(z-4-8i)+4+8i$

$\Leftrightarrow z' = iz-4i+8+4+8i \Leftrightarrow z' = iz+4i+12$

2) نعوض z ب $z_A = 7+2i$ فنجد :

$z' = i(7+2i)+4i+12$

$z' = 7i-2+4i+12 = 11i+10$

ومنه لحق النقطة C هو $z_C = 11i+10$