| الصفحة | الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا | المملكة المغربية<br>وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي |
|---|---|---|
| 1 / 4 | -نموذج تجريبي -3 - دورة يونيو 2021 | |
| ****** | ــ الموضوع ــ | |
| N° : S3B | | |
| MAB | | |

| إعداد : El-Ouarzazi Mohamed | ♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣♣ | RS2021 |
|---|---|---|

| المادة | الرياضيات | مدة الانجاز | 3h |
|---|---|---|---|
| الشعبة أو المسلك | شعبة العلوم التجريبية بمسالكها | المعامل | 7 |

## تعليمات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة ؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الإمتحان حسب الترتيب الذي يناسبه ؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة ؛

## مكونات الموضوع

✓ يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين ومسألة ، مستقلة فيما بينها ، وتتوزع حسب المجالات كما يلي :

| | | |
|---|---|---|
| التمرين الأول | المتتاليات العددية | 4 نقط |
| التمرين الثاني | الأعداد العقدية | 5 نقط |
| التمرين الثالث | حساب التكامل ، الدوال الأصلية | 2 نقط |
| المسألة | دراسة دالة عددية | 9 نقط |

✓ $ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري .

## التمرين الأول ( 4 نقط )

نعتبر $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 2020$ و $u_{n+1} = \frac{2020}{2021}u_n + \frac{1}{2021}n + 1$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ .

**1)** بين بالترجع أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n \leq n + 2021$ — 0.75

**2)** **أ)** تحقق أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2021}(n + 2021 - u_n)$ ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)$ تزايدية — 0.5

**ب)** استنتج أن لكل $n$ من $\mathbb{N}$ : $u_n \geq 2020$ — 0.25

**3)** لتكن $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $v_n = u_n - n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

**أ)** بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2020}{2021}$ — 0.5

**ب)** حدد $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج تعبير $u_n$ بدلالة $n$ — 0.75

**4)** بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ — 0.25

**5)** حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية $n$ التي تحقق : $0 < n(u_n - v_n) \leq e^{-\ln\left(\frac{1}{17}\right)}$ — 1

## التمرين الثاني ( 5 نقط )

**I.** نعتبر العدد العقدي $a$ بحيث $a = 2 + \sqrt{3} + i$

**1)** أ) بين أن معيار العدد العقدي $a$ هو $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ — 0.25

**ب)** تحقق أن $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{6}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{6}$ — 0.25

**2)** أ) بإخطاط $cos^2(\theta)$ (حيث $\theta$ حقيقي ) بين أن $1 + \cos 2\theta = 2cos^2(\theta)$ — 1

**ب)** بين أن $a = 4cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ( نذكر أن $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ ) — 0.5

**ج)** بين أن $a = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$ هو شكل المثلثي للعدد $a$ — 0.25

**د)** بين أن $\left(2\left(\frac{a}{4\cos\frac{\pi}{12}}\right) - 1\right)^{2021}$ عدد عقدي تخيلي صرف. ( لاحظ أن $i^{2021} = i$ ) — 0.5

**II.** نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط $A$ ، $B$ و $C$ والتي ألحاقها على التوالي : $a = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ؛ $b = 1$ ؛ $c = -i$

**1)** بين أن $d = a + c - b$ هو لحق النقطة $D$ صورة النقطة $A$ بالإزاحة $t$ ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$ — 0.25

**2)** لتكن النقطة $M'$ ذات اللحق $z'$ صورة النقطة $M$ ذات اللحق $z$ بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{5\pi}{6}$ حيث $\mathcal{R}(C) = B$ .

**أ)** بين أن $b = ac$ — 0.25

**ب)** بين أن $d - a = c(1 - a)$ — 0.25

**ج)** استنتج طبيعة المثلث $ABD$ — 0.5

**3)** حدد مجموعة النقط $M$ ذات اللحق $z$ بحيث : $|cz - b| = 3b^{10}$ — 0.5

## التمرين الثالث (2 نقط )

**1)** بين أن $\int_0^1 2x\,(x^2-1)^{2020}dx = \frac{1}{2021}$ — 0.5

**2)** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1cm$

نعتبر الدالة العددية $t(x)$ المعرفة على المجال $[1\ ,\ e]$ بما يلي : $t(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

0.5 أ) تحقق أن الدالة $U: x \mapsto 2x - x\ln x$ دالة أصلية للدالة $u : x \mapsto 1 - \ln x$ على المجال $[1\,,e]$

1 ب) بين أن $V = (e-2)\pi\ cm^3$ هو حجم المجسم المولد بدوران المنحنى $(C_t)$ دورة كاملة حول محور الأفاصيل على المجال $[1\,,e]$ .

## مســـــألـــــة ( 9 نقط )

**الجزء الأول :**

لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$

0.25 **1)** تحقق أن $g(2) = 0$

**2)** الجدول جانبه يمثل تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $g(2)$ | ↗ | $+\infty$ |

0.25 بين أن $g(x) \geq 0$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$.

**الجزء الثاني** :

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$

وليكن $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ . ( الوحدة $1cm$ )

0.5 **1)** أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 ب) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - (x-1)\big) = 0$ ثم استنتج أن المستقيم $(D)$ ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ بجوار $+\infty$ .

0.5 **2)** بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ثم استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا ينبغي تحديد اتجاهه .

0.5 **3)** أ) بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$

0.5 ب) أحسب $f'(2)$ ثم أول النتيجة هندسيا.

0.5 ج) بين أن $f$ دالة تزايدية على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$ .

0.25 **4)** استنتج أن النقطة ذات الإحداثيات $(2\,;3)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$

0.5 **5)** بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $]0\,,0.5[$ حيث $f(\alpha) = 0$

0.5 **6)** بين أن المنحنى $(C_f)$ يوجد فوق المستقيم $(D)$ على المجال $[0\,,+\infty[$ ويوجد تحت المستقيم $(D)$ على المجال $]-\infty\,,0]$

0.75 **7)** أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(D)$ . ( نأخذ $f(0) = -1$ )

( لاحظ أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = x$ يقطع المنحنى $(C_f)$ في نقطتين أفاصيلهما على التوالي $0.15$ و $3.14$ )

**الجزء الثالث :**

0.25 **1)** بين أن الدالة $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة على $\mathbb{R}$

0.5 **2)** أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ، $(C_{f^{-1}})$ المنحنى الممثل للدالة $f^{-1}$ .

0.5 **3)** حدد في $\mathbb{R}$ حلا واحد للمعادلة $f^{-1}(x) + f(x-1) = 5$

**الجزء الرابع :**

لتكن $h$ الدالة العددية المعرفة بـ $h(x) = xe^{-x+2}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$

**1)** تحقق أن : $2h(x) + h'(x) - h''(x) = 3e^{-x+2}$ 0.75

**2)** حدد $H(x)$ الدالة الاصلية للدالة $h(x)$ على $\mathbb{R}$ ( نأخذ $c = 0$ ) 0.75

**3)** أحسب بـ $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(C_f)$ والمستقيم $(D)$ والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 2$ 0.75

الله ولـــــي التوفيـــــــق