

سلسلة 1	المتتاليات العددية حلول مقترحة		السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية
تمرين 1: $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ ، $u_0 = 2$; $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1$; $n \geq 0$			
$u_4 = \frac{2}{5}u_3 + 1$ $u_4 = \frac{422}{625} + 1 = \frac{1047}{125}$	$u_3 = \frac{2}{5}u_2 + 1$ $u_3 = \frac{86}{125} + 1 = \frac{211}{125}$	$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + 1$ $u_2 = \frac{18}{25} + 1 = \frac{43}{25}$	$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1$ $u_1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$
الهدف من السؤال هو أن تعلم أن حساب أحد حدود المتتاليات الترجعية يتطلب حساب كل الحدود التي قبله.			
<p>لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(v_n + \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n$</p> <p>إذن v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$</p> <p>لاحظ أن $v_n = u_n - \frac{5}{3}$ تعطي: $u_n = v_n + \frac{5}{3}$ واستعملناها لأننا نبحت عن كتابة v_{n+1} بدلالة v_n</p>			
<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block;">$v_n = v_0 q^n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n$</div>			
<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block;">$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$</div> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block; margin-left: 20px;">$u_n = v_n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}$</div>			
تذكير: أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ حيث $-1 < a < 1$			
تمرين 2: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \left(\frac{n^2 - 3n + 3}{2}\right)$ ، $u_0 = \frac{5}{2}$; $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + n^2)$; $n \geq 0$			
<p>$v_{n+1} = u_{n+1} - \left(\frac{(n+1)^2 - 3(n+1) + 3}{2}\right) = \frac{1}{3}(u_n + n^2) - \frac{n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 3}{2} = \frac{u_n + n^2}{3} - \frac{n^2 - n + 1}{2}$</p> <p>$v_{n+1} = \frac{2u_n + 2n^2 - 3n^2 + 3n - 3}{6} = \frac{2u_n - n^2 + 3n - 3}{6} = \frac{2\left(v_n + \frac{n^2 - 3n + 3}{2}\right) - n^2 + 3n - 3}{6}$</p> <p>$v_{n+1} = \frac{2v_n + n^2 - 3n + 3 - n^2 + 3n - 3}{6} = \frac{1}{3}v_n$</p> <p>إذن v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأول: $v_0 = u_0 - \frac{0 - 0 + 3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$</p>			
<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block;">$u_n = v_n + \frac{n^2 - 3n + 3}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{n^2 - 3n + 3}{2}$</div> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block; margin-left: 20px;">$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$</div>			
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3n + 3}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}n^2 = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$			
S_n يمثل مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ إذن:			
<div style="border: 1px solid red; padding: 5px; display: inline-block;">$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}$</div> و $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$			
انتبه لعدد الحدود: $n + 1 - 0 = n + 1$			

تمرين 3: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad , \quad u_0 = -1 ; u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} ; n \geq 0$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن: $u_0 = -1$ و $-1 < 3$
 - نفترض أن $u_n < 3$ و نبين أن $u_{n+1} < 3$ ، لدينا :

$$u_n < 3 \Rightarrow -u_n > -3 \Rightarrow 6 - u_n > 6 - 3 \Rightarrow 6 - u_n > 3 \Rightarrow \frac{1}{6 - u_n} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{6 - u_n} < 3 \Rightarrow u_{n+1} < 3$$
- بالتالي وحسب مبدأ التراجع فإن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 3$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6 - u_n} - u_n = \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6 - u_n} = \frac{(3 - u_n)^2}{6 - u_n}$

وبما أن: $0 < 6 - u_n > 3$ فإن: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، بالتالي (u_n) تزايدية.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 18 + 3u_n}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{3u_n - 9} - \frac{1}{u_n - 3}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{3}{3(u_n - 3)} = \frac{3 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{-1}{3}$$

إذن v_n متتالية حسابية أساسها: $r = \frac{-1}{3}$ وحدها الأول: $v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{-1}{4}$

$$v_n = \frac{1}{u_n - 3} \Rightarrow \frac{1}{v_n} = u_n - 3 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{1}{\frac{-1}{4} + \frac{-1}{3}n} + 3$$

$$v_n = v_0 + rn = \frac{-1}{4} + \frac{-1}{3}n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{-1}{4} + \frac{-1}{3}n} + 3 = 0 + 3 = 3$$

S_n يمثل مجموع حدود متتالية حسابية أساسها $r = \frac{-1}{3}$ إذن :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (n+1) \frac{v_0 + v_n}{2} = (n+1) \frac{\frac{-1}{4} + \frac{-1}{4} - \frac{1}{3}n}{2} = \frac{(n+1) \left(\frac{-1}{2} - \frac{n}{3} \right)}{2}$$

($\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} - \frac{n}{3} = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$: لأن) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$

تمرين 4: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = u_n^2 - 4 \quad , \quad u_1 = 1 ; u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 12} ; n \geq 1$

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 12} \right)^2 - 4 = \frac{u_n^2 + 12}{4} - 4 = \frac{u_n^2 + 12 - 16}{4} = \frac{u_n^2 - 4}{4} = \frac{1}{4} v_n$

إذن v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول: $v_1 = u_1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$

$$v_n = u_n^2 - 4 \Rightarrow u_n^2 = v_n + 4 \Rightarrow u_n = \sqrt{v_n + 4} = \sqrt{-3 \left(\frac{1}{4} \right)^n + 4}$$

$$v_n = v_1 q^{n-1} = -3 \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{-3 \left(\frac{1}{4} \right)^n + 4} = \sqrt{-3 \times 0 + 4} = 2$$

انتبه للحد العام للمتتالية الهندسية v_n لأنه لدينا في هذا التمرين الحد الأول v_1 وليس v_0 ، أيضا

$$u_n \geq 0 \quad \text{لأن} \quad u_n^2 = v_n + 4 \Rightarrow u_n = \sqrt{v_n + 4}$$

S_n يمثل مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ إذن :

$$S_n = v_1 + \dots + v_n = v_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = -3 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = -3 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = -4 \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) = -4(1 - 0) = -4 \quad \text{منه :}$$

رياضيات النجـاح أذ سمير لخريسي