مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 13 في درس الجداء المتجهي

القدرات المنتظرة

- حساب مساحة مثلث باستعمال الجداء المتجهي
- تحديد معادلة مستوى محدد بثلاثة نقط غير مستقيمية
- تطبيق الجداء المتجهي في حل مسائل هندسية و فزيائية

محتوى الدرس

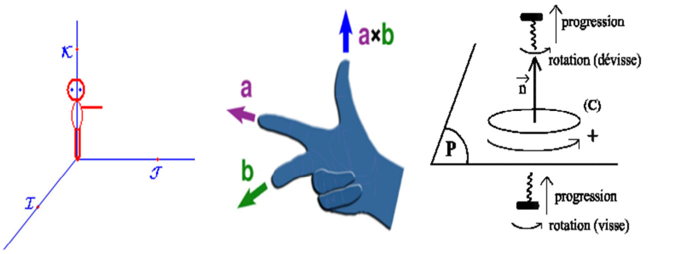
- توجيه الفضاء-ثلاثي الأوجه-المعلم و الأساس الموجهان
- تعريف هندسي للجداء المتجهي و تأويل منظمه
- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي لمتجهتين
- استقامية متجهتين
- مسافة نقطة عن مستقيم ومساحة مثلث ومتوازي الأضلاع

I. توجيه الفضاء-ثلاثي الأوجه-المعلم و الأساس الموجهان:

1)ثلاثي الأوجه:

تعريف: ثلاثة أنصاف مستقيمات في الفضاء لها نفس الأصل O و غير مستوائية تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه, نرمز له بالرمز $(Ox;Oy;Oz)$. $[Ox)$ و $[Oy)$ و $[Oz)$ تسمى أحرف ثلاثي الأوجه $(Ox;Oy;Oz)$.

2)توجيه الفضاء:



ليكن $(Ox;Oy;Oz)$ ثلاثي أوجه: رجل أمبير لثلاثي الأوجه $(Ox;Oy;Oz)$, هو شخص خيالي محمول على الحرف $[Oz)$, قدماه في النقطة O , و ينظر إلى الحرف $[Ox)$ بالنسبة لرجل أمبير هناك وضعيتان للحرف $[Oy)$.

الحرف $[Oy)$ عن يساره و الحرف $[Oy)$ عن يمينه اصطلاحيا, نقول إن الثلاثي الأوجه $(Ox;Oy;Oz)$ مباشر (أو موجب) إذا كان رجل أمبير محمولا على $[Oz)$ و قدماه في النقطة O و ينظر إلى الحرف $[Ox)$ و يكون الحرف $[Oy)$ عن يساره.

3)الأساس و المعلم الموجهان:

تعريف: ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلما في الفضاء. نضع $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ و $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$.

نقول إن الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشر إذا كان ثلاثي الأوجه $(OI;OJ;OK)$ مباشرا.

نقول إن المعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشر إذا كان الأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشرا.

نقول إن الفضاء موجه توجيها مباشرا (أو موجبا) إذا كان منسوبا لمعلم مباشر.

فيما تبقى من فقرات الدرس, نعتبر أن الفضاء موجه توجيها مباشرا

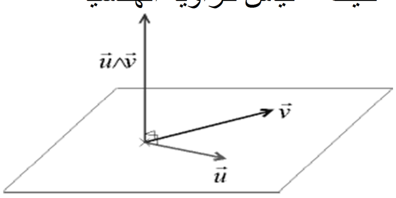
II. تعريف هندسي للجداء المتجهي و تأويل منظمه:

تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في الفضاء الموجه .

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب, هو المتجهة التي نرمز لها بالرمز $\vec{u}\wedge\vec{v}$ و المعرفة بما يلي:

1. إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان: $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
2. إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ بحيث:
   - $\vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$
   - $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ أساس مباشر,
   - $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta$

حيث θ قياس للزاوية الهندسية BAC مع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.



مثال :

أحسب $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|$ إذا علمت أن: $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)=\frac{\pi}{3}$ و $\left\|\vec{u}\right\|=1$ و $\left\|\vec{v}\right\|=3$

الجواب : $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\sin\theta=1\cdot 3\sin\frac{\pi}{3}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

نتائج: لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء , لدينا: $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ و $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$ و $\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{0}$

III. خاصيات الجداء المتجهي

خاصية: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا,لدينا:

$$\vec{v}\wedge\vec{u}=-\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\qquad \vec{u}\wedge\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$$

$$\left(k\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=k\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$$

$$\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$$

خاصية: تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين مستقيميتين في الفضاء إذا وفقط إذا كان: $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

مثال لكن $ABCDEFGH$ مكعبا و M و N النقطتين المعرفتين بما يلي: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1)بين أن : $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2)أحسب : $\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{NG}$

3)ماذا تستنتج ؟

أجوبة : 1) $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AH}-\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{NG}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\wedge\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

لدينا $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AE}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ اذن :

$\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{NG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}=\vec{0}$

3)نستنتج أن المتجهتين : $\overrightarrow{NG}$ و $\overrightarrow{NM}$ مستقيميتين

وبالتالي النقط : M و N و G مستقيمية

IV. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي لمتجهتين

إحداثيات الجداء المتجهي بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر:

خاصية: الفضاء منسوب إلى أساس متعامد ممنظم مباشر $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء, إحداثياتهما $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ و $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ على التوالي.

$\left(X;Y;Z\right)$ مثلوث إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ بحيث:

$X=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$ و $Y=-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$ و $Z=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

مثال: $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ أحسب $\vec{u}\wedge\vec{v}$

الجواب : $\vec{u}\left(1;1;1\right)$ و $\vec{v}\left(2;1;2\right)$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-0\vec{j}-\vec{k}=\vec{i}-\vec{k}$$

تمرين1: $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ أحسب $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$\vec{u}\left(1;2;1\right)$ و $\vec{v}\left(3;-2;-1\right)$

الجواب: $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{j}-8\vec{k}$

V. تطبيقات

1) خاصية:مساحة مثلث-مساحة متوازي الأضلاع:

- ليكن ABC مثلثا.مساحة المثلث ABC هي: $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.
- ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. مساحة $ABCD$ هي: $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

مثال: نعتبر في الفضاء النقط $A\left(0;1;2\right)$ و $B\left(1;1;0\right)$ و $C\left(1;0;1\right)$

1.حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2.أحسب مساحة المثلث ABC

3.حدد معادلة ديكارتية للمستوى $\left(ABC\right)$.

الجواب: (1 $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

$\overrightarrow{AB}\left(1;0;-2\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(1;-1;-1\right)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

(2 $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

ومنه : $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{\left(-2\right)^2+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{6}$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(3 $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى ABC

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل :

$ax+by+cz+d=0$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(-2;-1;-1\right)$ متجهة منظميه عليه اذن :

$a=-2$ و $b=-1$ و $c=-1$

ومنه : $\left(ABC\right)\ -2x-1y-1z+d=0$

و نعلم أن: $A\left(0;1;2\right)\in\left(P\right)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

يعني $0-1-2+d=0$ يعني $d=3$

وبالتالي : $\left(ABC\right)\ -2x-1y-1z+3=0$

يعني : $\left(ABC\right)\ 2x+y+z-3=0$

تمرين2: نعتبر النقط $A\left(1;1;0\right)$ و $B\left(2;3;4\right)$ و $C\left(-1;0;3\right)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ وبين أن النقط A و B و C غير مستقيمية
2. أحسب مساحة المثلث ABC

3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

الجواب (1: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;3)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}2&-1\\4&3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-2\\4&3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-2\\2&-1\end{vmatrix}\vec{k}=10\vec{i}-11\vec{j}+3\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

(2 $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{10^2+(-11)^2+3^2}=\sqrt{230}$$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{230}}{2}$$

(3 $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=10\vec{i}-11\vec{j}+3\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى ABC

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(10;-11;3)$ متجهة منظميه عليه اذن : $a=10$ و $b=-11$ و $c=3$

ومنه : $(ABC)\ 10x-11y+3z+d=0$

و نعلم أن: $A(1;1;0)\in(P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

يعني $10-11+0+d=0$ يعني $d=1$

وبالتالي : $(ABC)\ 10x-11y+3z+1=0$

2) مسافة نقطة عن مستقيم:

خاصية: مسافة نقطة M من الفضاء عن المستقيم (D) المار من النقطة A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له هي: $d\left(M;D(A;\vec{u})\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

مثال: أحسب مسافة النقطة $M(2;1;1)$ عن المستقيم (D) المعرف بما يلي:

$$(D):\begin{cases}x=1\\y=1-3t\ (t\in\mathbb{R})\\z=4t\end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D):\begin{cases}x=1+0t\\y=1-3t\ (t\in\mathbb{R})\\z=0+4t\end{cases}$$

لدينا $A(1;1;0)\in(D)$ و $\vec{u}(0;-3;4)$ متجهة موجهة ل (D)

$\overrightarrow{AM}(1;0;1)$ و $\vec{u}(0;-3;4)$

$$\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}0&-3\\1&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\1&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&-3\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}$$

$$d\left(M;D(A;\vec{u})\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-3)^2}}{\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

تمرين3: أحسب مسافة النقطة $B(0;1;2)$ عن المستقيم (D) المعرف بما يلي:

$$(D):\begin{cases}x=-1+t\\y=2-t\ (t\in\mathbb{R})\\z=2t\end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D):\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\ (t\in\mathbb{R})\\z=0+2t\end{cases}$$

لدينا $A(1;2;0)\in(D)$ و $\vec{u}(1;-1;2)$ متجهة موجهة ل (D)

$B(0;1;2)$ $\quad$ $\vec{u}(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{AB}(-1;-1;2)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&1\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=0\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$

$$d(B;D)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{0^2+4^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{10}{3}}$$

تمارين للبحث

التمرين 1: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها $(x-1)^2+y^2+z^2-2y-5=0$.

1. حدد Ω مركز الفلكة (S) و شعاعها r.
2. نعتبر النقطتين $A(-1;2;1)$ و $B(2;-1;1)$ ، أحسب مساحة المثلث $AB\Omega$.
3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى المماس للفلكة في النقطة A.

التمرين 2: الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;0;-1)$ و $B(1;3;-1)$ و $C\left(-\frac{1}{3};1;0\right)$.

1. حدد $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.
2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المعرف بالنقط A و B و C .
3. لتكن الفلكة (S) ذات الشعاع $r=1$ و المركز $\Omega(0,0,1)$.
   أ. أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) .
   ب. بين أن الفلكة (S) مماسة للمستوى (P).
   ج. حدد مثلوث إحداثيات نقطة التماس.

التمرين 3: في الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(5;-1;2)$ و $B(1;-3;-2)$ و $C(-2;-1;2)$.

1) أحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC .

2) أحسب $\left|\sin\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\right|$.

3) أحسب مسافة النقطة B عن المستقيم (AC).