الأعداد العقدية - الجزء الثاني-

1- المعادلات من الدرجة الثانية

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad ; \quad \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^{-*} \quad \left(i\sqrt{-a}\right)^2 = i^2 \times -a = a \quad ; \quad \left(-i\sqrt{-a}\right)^2 = (-i)^2 \times -a = a$$

أ/ الجدر المربع لعدد حقيقي

ليكن a عدد حقيقي غير منعدم

اذا كان a موجبا فان للعدد a جدرين مربعين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

اذا كان a سالبا فان للعدد a جدرين مربعين هما $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$

لكل عدد حقيقي جدرين مربعي متقابلين

الجدر مربع صفر هو صفر

أمثلة

الجدران المربعان للعدد 3 هو $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

الجدران المربعان للعدد -1 هو i و $-i$

الجدران المربعان للعدد -25 هو $5i$ و $-5i$

الجدران المربعان للعدد -3 هو $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$

ب/ المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية بحيث a غير منعدم .

نحل $az^2 + bz + c = 0 \quad z \in \mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{حيث} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

إذا كان $\Delta \geq 0$ فان

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

ومنه $z = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $z = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

اذا كان $\Delta \prec 0$ فان $-\Delta \succ 0$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + i^2\frac{-\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + i^2\frac{\sqrt{-\Delta}^2}{4a^2} = 0$$

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$$

منه $z = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ أو $z = \dfrac{-b + -\sqrt{-\Delta}}{2a}$

في كلتا الحالتين يمكن كتابة $z = \dfrac{-b + d}{2a} \quad ; \quad z = \dfrac{-b - d}{2a}$ حيث d جدر مربع للعدد Δ

لتكن a و b و c أعدادا **حقيقية** بحيث a غير منعدم .

العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة $az^2 + bz + c = 0$

ليكن d جدر مربع للعدد Δ

إذا كان $\Delta \neq 0$ فان للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين مختلفين هما $z = \dfrac{-b + d}{2a} \quad ; \quad z = \dfrac{-b - d}{2a}$

إذا كان $\Delta = 0$ فان للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حل وحيد هو $z = \dfrac{-b}{2a}$

أمثلة

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية

$$-2z^2+2z+3=0 \qquad -2z^2-3z+2=0 \qquad 2z^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)z+\frac{3}{2}+\sqrt{2}=0$$

الحل

ليكن Δ مميز المعادلة $2z^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)z+\frac{3}{2}+\sqrt{2}=0$

$$\Delta=\left(-\left(2+2\sqrt{2}\right)\right)^2-8\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)=4+8\sqrt{2}+8-12-8\sqrt{2}=0$$

إذن $z=\frac{2+2\sqrt{2}}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ومنه $S=\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2z^2-3z+2=0$

$$\Delta=9+16=25$$

$z=\frac{3+5}{-4}=-2$ أو $z=\frac{3-5}{-4}=\frac{1}{2}$ ومنه $S=\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2z^2+2z+3=0$

$$\Delta=4-12=-8=\left(i2\sqrt{2}\right)^2$$

$z=\frac{-2+i2\sqrt{2}}{-4}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؟أو $z=\frac{-2-i2\sqrt{2}}{-4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $S=\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

تمرين

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين

$$z^2-6z+12=0 \qquad z^2+2\sqrt{3}z+12=0$$

2- أكتب العددين $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_1=-\sqrt{3}+3i$ في شكلهما المثلثي

3- في المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر$(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$،أنشئ $A(z_1)$ و $B(z_2)$ و $E(z_1+z_2)$ ثم حدد طبيعة الرباعي $OAEB$ معللا جوابك

2/ صيغة موافر و تطبيقاتها

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=([1;\alpha])^n=\left[1^n;n\alpha\right]=[1;n\alpha]=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$$

أ/خاصية

$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha \qquad \forall n\in\mathbb{Z}^* \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$ هذه الصيغة تسمى هذه ب صيغة موافر

ب/ حساب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin n\theta$

أنشطة

أنشر $(\cos\theta+i\sin\theta)^3$

و استنتج أن $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ $\qquad \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

الجواب

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3i\left(\cos^2\theta\right)\sin\theta-3(\cos\theta)\left(\sin^2\theta\right)-i\sin^3\theta$$

$$=\cos^3\theta-3(\cos\theta)\left(\sin^2\theta\right)+i\left(3\left(\cos^2\theta\right)\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

لدينا $(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+\sin 3\theta$

ومنه $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3(\cos\theta)\left(\sin^2\theta\right)=\cos^3\theta-3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

و $\sin 3\theta=3\left(\cos^2\theta\right)\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

تمرين

أحسب $\cos x$ على شكل حدودية بـ $\cos x$ درجتها 5

* لتكن $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$ من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

3- الترميز الاسية و تطبيقاته مثلثة

أ/ الكتابة $e^{i\theta}$

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$، لكل عدد عقدي معياره 1 و عمدته θ أي

$$e^{i\theta} = [1;\theta] = \cos\theta + i\sin\theta$$

أمثلة

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad e^{i\pi} = -1 \qquad e^{0} = 1 \qquad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

ب/خاصية أساسية

لكل عددين عقديين θ و θ' $\qquad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

ج/ الكتابة الاسية لعدد عقدي غير منعدم

لكل عدد عقدي غير منعدم z معياره r و عمدته: θ $\qquad z = [r,\alpha] = re^{i\alpha}$

الحساب باستعمال الترميز الاسي

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث $z = re^{i\theta}$ و $z = r'e^{i\theta'}$ حيث $r \succ 0$ و $r' \succ 0$

$$z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \qquad \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} \qquad z = r^n e^{in\theta}$$

أمثلة

باستعمال الترميز الاسي حدد معيار و عمدة كل من الاعداد العقدية التالية.

$$z_2 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^4 \qquad z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$$

* لدينا $3+3i\sqrt{3} = 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{6e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

* لدينا $1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_2 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

د/ صيغتا اولير و تطبيقاته

لكل عدد عقدي θ

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e^{i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

و منه $\qquad 2i\sin\alpha = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \qquad 2\cos\alpha = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

لكل عدد عقدي θ

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\alpha = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

و نسمي الصيغتين بصيغتي أولير

تطبيق: اخطاط حدودية مثلثة

اخطاط حدودية مثلثية هو تحويل الجداءات التي على شكل $\cos^n\theta$ أو $\sin^n\theta$ أو $\cos^n\theta \times \sin^m\theta$ الى مجموع حدود من شكل $a\cos\alpha\theta + b\sin\alpha\theta$

مثال نخطط $\cos^4\theta$

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{i4\theta} + 4e^{i3\theta}\cdot e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}\cdot e^{-i2\theta} + 4e^{i\theta}\cdot e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}\right)$$

$$\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}+4\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)+6\right)=\frac{1}{8}\times\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}+\frac{3}{8}$$

$$\cos^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$$

تمرين أخطط $\sin^4\theta\times\cos^3\theta$

-الدوران و الاعداد العقدية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا $[1;\alpha]=(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

نربط النقطة $M(z)$ من المستوى بالنقطة $M'(z')$ بالتحويل r حيث $z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega)$

نحدد علاقة متجهية بين النقطتين M و M' ثم نحدد طبيعة r

نلاحظ أن $r(\Omega)=\Omega$

لتكن $M(z)=\Omega(\omega)$ و $M'(z')$

$$r(M)=M'\Leftrightarrow z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega)\Leftrightarrow\frac{z'-\omega}{z-\omega}=[1;\alpha]\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}=1\\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega M'=\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]\end{cases}$$

إذن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

خاصية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)

حيث $z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

$[1;\alpha]=(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

الدوران باستعمال الكتابة الاسية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)

حيث $z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

تمرين

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقيهما على التوالي هما : $z_A=i\quad;\quad z_B=2$

.I

1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B' بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.

2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

3) مثل النقط A و B و B' .

.II

نعتبر التحويل f الذي يحول كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+1$.

1) حدد لحق النقطة Ω الصامدة بالتحويل f.

2) حدد طبيعة التحويل f و عناصره المميزة