مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 1 في درس اتصال دالة عددية 8 س

محتوى البرنامج

- الاتصال في نقطة
- الاتصال على اليمين واليسار
- الاتصال على مجال: (حالة دالة حدودية ودالة جذرية ودالة مثلثية والدلة $x \to \sqrt{x}$)
- صورة قطعة أو مجال : (بدالة متصلة ؛ بدالة متصلة و رتيبة قطعا)
- مبرهنة القيم الوسيطية حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال
- الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال

القدرات المنتظرة

- تحديد صورة قطعة و مجال بدالة متصلة وبدالة متصلة و رتيبة قطعا
- تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية في حل بعض المعادلات والمتراجحات أو دراسة اشارة بعض التعابير

التوجيهات التربوية

– يتم اعتماد التعريف التالي : نقول إن دالة f متصلة في نقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ؛

– تقبل النتائج المتعلقة باتصال الدوال الحدودية و الجذرية و المثلثية و الدالة $x \to \sqrt{x}$ و يتم التركيز على تطبيقاتها ؛

– نقبل أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة و أن صورة مجال هي أيضا مجال ثم تستنتج مبرهنة القيم الوسيطية ؛

– نقبل أن $f+g$ و fg و λf و $f \circ g$ دوال متصلة على مجال I إذا كانت f و g متصلتين على I ؛

I. الاتصال في نقطة و الاتصال على مجال

1. الاتصال في نقطة

تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 إذا كان

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

مثال1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 2$

الجواب : $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to2} x+2 = 4 = f(2)$ ومنه f دالة متصلة عند : $x_0 = 2$

مثال2: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}, x \neq 1 \\ f(1) = 4 \end{cases}$ أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 1$

الجواب : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1^3}{x-1}$

نعلم أن : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

ومنه : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1^3}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x\times1+1^2)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} x^2+x\times1+1^2 = 3 \neq f(1)$

ومنه f دالة غير متصلة عند : $x_0 = 1$ أو متقطعة عند : $x_0 = 1$

تمرين1: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}, x \neq 2 \\ f(2) = 12 \end{cases}$ أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 2$

الجواب : $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2^3}{x-2}$

نعلم أن : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ومنه : $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+x\times2+2^2)}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2} x^2+x\times2+2^2=12=f(1)$

ومنه f دالة متصلة عند : $x_0=1$

2. الاتصال على اليمين وعلى اليسارفي نقطة

نشاط : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{|x|}; x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. أكتب صيغة الدالة دون استعمال رمز القيمة المطلقة
2. أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$
3. ماذا تلاحظ؟

الجواب : 1) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{x}; x>0 \\ f(x)=-\frac{x^2}{x}; x<0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} f(x)=x; x>0 \\ f(x)=-x; x<0 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x=0=f(0)$

ومنه f متصلة على اليمين عند $x_0=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} -x=0=f(0)$

ومنه f متصلة على اليسار عند $x_0=0$

3) نلاحظ أن f متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0=0$

ومنه :نقول f متصلة عند $x_0=0$

تعريف :

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[x_0; x_0+\alpha[$ حيث $\alpha\succ0$

نقول إن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\succ x_0}} f(x)=f(x_0)$

- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $]x_0-\alpha; x_0]$ حيث $\alpha\succ0$

نقول إن الدالة f متصلة على اليسار في النقطة x_0 إذا كان $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\prec x_0}} f(x)=f(x_0)$

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I

تكون الدالة f متصلة في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة على اليمين في النقطة x_0 و على اليسار في النقطة x_0

تمرين2: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sin 2x}{x}-2, x>0 \\ f(x)=x^3-x+1, x\leq 0 \end{cases}$

1. أدرس اتصال الدالة f على اليمين و على اليسار في النقطة $x_0=0$
2. هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$ ؟

الجواب : $f(0)=0^3-0+1=1$

1) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin 2x}{x}-2=\lim\limits_{x\to0^+} 2\frac{\sin 2x}{2x}-2=2\times1-2=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0\neq f(0)$

ومنه f غير متصلة على اليمين عند $x_0=0$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x^3-x+1=1=f(0)$

ومنه f متصلة على اليسار عند $x_0=0$

2) نلاحظ أن f غير متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0=0$

ومنه : f غير متصلة عند $x_0=0$

تمرين2: لتكن f الدالة العددية المعرفة على بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=ax^2+2x+3, x\leq 2 \\ f(x)=\frac{x+3}{x-1}, x>2 \end{cases}$$

حدد العدد الحقيقي a علما أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=2$

الجواب : $f(2)=a\times2^2+2\times2+3=4a+7$

نعلم أن : f متصلة في النقطة $x_0=2$

ومنه f متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0=2$

اذن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=f(2) \\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=f(2) \end{cases}$ اذن : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+3}{x-1}=4a+7$

يعني : $5=4a+7$ يعني : $-2=4a$ يعني : $-\frac{1}{2}=a$

4. الاتصال على مجال

تعريف: نقول إن f دالة متصلة على مجال مفتوح I إذا كانت متصلة في كل نقطة x_0 من I/

نقول إن f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ إذا كانت متصلة على مجال $]a;b[$ و متصلة على اليمين في النقطة a و على اليسار في النقطة b

اتصال الدوال الاعتيادية:

- ➢ الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- ➢ الدوال $\sin$ و $\cos$ متصلة على $\mathbb{R}$
- ➢ الدوال الجذرية و الدالة $\tan$ متصلة على مجموعة تعريفها
- ➢ الدالة $x\to\sqrt{x}$ متصلة على مجموعة تعريفها

مثال: أدرس اتصال الدوال المعرفة كالتالي:

$$g(x)=\frac{6x^5-7x}{x-3}, \; f(x)=x^4-6x+9$$

$$h(x)=\sin x+2\cos x$$

الجواب : f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$

g دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة g

$D_g=\{x\in\mathbb{R} / x-3\neq0\}$

$x-3=0$ يعني $x=3$ ومنه : $D_g=\mathbb{R}-\{3\}$

وبالتالي g دالة متصلة على $D_g=\mathbb{R}-\{3\}$

h دالة مكونة من دوال متصلة على $\mathbb{R}$ اذن h متصلة على $\mathbb{R}$

تمرين3: أدرس اتصال الدوال المعرفة كالتالي:

1) $f(x)=x^2-16x+1$ (2 $g(x)=\frac{3x+1}{2x^2-x-1}$ (3 $h(x)=\sqrt{3x+9}$

الجواب : 1) f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$

2) g دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة g

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\neq 0\}$

نحل المعادلة باستعمال المميز $2x^2-x-1=0$

$a=2$ و $b=-1$ و $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times2}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$ و $x_2=\frac{1-3}{2\times2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

ومنه: $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

وبالتالي g دالة متصلة على $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

3) h دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

$D_h=\{x\in\mathbb{R}/3x+9\geq 0\}$

$3x+9\geq 0$ يعني $x\geq -3$ ومنه $D_h=[-3,+\infty[$

وبالتالي h دالة متصلة على $D_h=[-3,+\infty[$

تمرين4:

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi x}{\sin 3x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+3x+1}{4x^2+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x+1}{x+3}}$

5. دالة الجزء الصحيح

تعريف : دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصخيح النسبي الوحيد n الذي يحقق : $n\leq x<n+1$

نرمز لصورة x بهذه الدالة بالرمز $E(x)$

ملاحظات : $\forall n\in\mathbb{Z}$

❖ دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في النقطة n وغير متصلة على اليسار في النقطة n

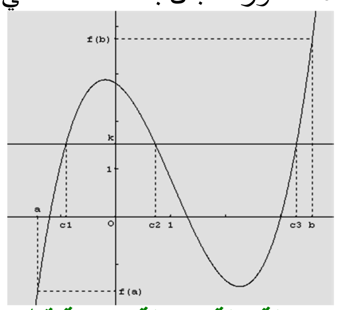
❖ دالة الجزء الصحيح متصلة على المجال $[n;n+1[$

❖ دالة الجزء الصحيح غير متصلة في النقطة n

II. صورة مجال بدالة متصلة:

1. صورة قطعة وصورة مجال

- صورة قطعة بدالة متصلة هي أيضا قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هي أيضا مجال



2. حالة دالة متصلة ورتيبة قطعا

الحالة 1 : f متصلة وتزايدية قطعا

$f([a;b])=[f(a);f(b)]$ و $f([a;b[)=\left[f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x)\right[$

$f(]a;b])=\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x);f(b)\right]$ و $f(]a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x)\right[$

الحالة 2 : f متصلة وتناقصية قطعا

$f([a;b])=[f(b);f(a)]$ و $f([a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x);f(b)\right]$

$f(]a;b])=\left[f(b);\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)\right[$ و $f(]a;b[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)\right[$

أمثلة: حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1. $I=[-2;3]$ و $f(x)=5x-1$
2. $I=[-5;-3]$ و $f(x)=x^2$
3. $I=[-3,1[$ و $J=]-\infty;1[$ و $K=]1;+\infty[$ و $f(x)=\frac{1}{x-1}$

أجوبة: 1) $f(x)=5x-1$

f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[-2;3]$

$f'(x)=(5x-1)'=5>0$ ومنه وتزايدية قطعا على I

$f(I)=f([-2;3])=[f(-2);f(3)]=[-11;14]$

2) $f(x)=x^2$

f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[-5;-3]$

لأن: $f'(x)=(x^2)'=2x<0$: $x\in[-5;-3]$ يعني $-5\leq x\leq -3$

ومنه تناقصية قطعا على I وبالتالي :

$f(I)=f([-5;-3])=[f(-3);f(-5)]=[9;25]$

3) $f(x)=\frac{1}{x-1}$

f دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq 0\}$

$x-1=0$ يعني $x=1$ ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

ومنه f دالة متصلة على $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

وبالتالي f دالة متصلة على كل المجالات التالية:

$I=[-3,1[$ و $J=]-\infty;1[$ و $K=]1;+\infty[$

$f'(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}<0$

ومنه تناقصية قطعا

$f(I)=f([-3,1[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}f(x);f(-3)\right]$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ و $f(-3)=-\frac{1}{4}$ ومنه $f(I)=\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right]$

$f(J)=f(]-\infty;1[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ ومنه : $f(J)=f(]-\infty;1[)=]-\infty;0[$

$K=]1;+\infty[$ $f(K)=f(]1;+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}}f(x)\right[=]0;+\infty[$

تمرين5: حدد صورة المجال I بالدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1. $I=[1;2]$ $J=[2;+\infty[$ $f(x)=-4x+1$
2. $I=[2,6[$ و $J=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ $K=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ $f(x)=\frac{x-1}{2x-1}$

أجوبة: 1) $f(x)=-4x+1$

f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[1;2]$

$f'(x)=(-4x+1)'=-4<0$ ومنه f تناقصية قطعا على I

$f(I)=f([1;2])=[f(2);f(1)]=[-7;-3]$

$f(J)=f([2;+\infty[)=]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);f(2)]$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -4x+1=-\infty$ ، $f(J)=f([2;+\infty[)=]-\infty;-7]$

2) $f(x)=\frac{x-1}{2x-1}$ دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 0\}$ ، $2x-1=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ ومنه :

$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ومنه f دالة متصلة على $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

وبالتالي f دالة متصلة على كل المجالات التالية:

$I=[2,6[$ و $J=]-\infty;\frac{1}{2}[$ ، $K=]\frac{1}{2};+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)'=\frac{(x-1)'\times(2x-1)-(x-1)\times(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{1}{(2x-1)^2}>0$$

ومنه تزايدية قطعا $f(I)=f([2,6[)=[f(2);f(6)[=\left[\frac{1}{3};\frac{5}{11}\right[$

$$f(J)=f\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\right)=\left]\lim_{x\to-\infty} f(x);\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} f(x)\right[$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}} f(x)=+\infty$ ومنه : $f(J)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$K=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f(K)=f\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

3. مبرهنة القيم الوسيطية

خاصية: لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c بين a و b بحيث $f(c)=k$

نتيجة 1: إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a;b[$.

مثال: بين أن المعادلة التالية تقبل حلا على الأقل في المجال I:

$x^4+x^2+4x-1=0$ ، $I=[0;1]$

الجواب : نضع: $f(x)=x^4+x^2+4x-1$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[0;1]$

$f(0)=-1$ و $f(1)=5$ اذن : $f(0)\times f(1)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $I=[0;1]$

تمرين6: بين أن المعادلات التالية تقبل حلا على الأقل في المجال I في الحالات التالية :

1. $\sin x+\frac{1}{3}=0$ ، $I=\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$
2. $\cos x=x$ ، $I=[0;\pi]$

الجواب (1: نضع: $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$

$f(0)=\frac{1}{3}>0$ و $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}<0$ اذن: $f(0)\times f\left(-\frac{\pi}{6}\right)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال I

2) $\cos x=x$ يعني $\cos x-x=0$

نضع: $f(x)=\cos x-x$ المعادلة تصبح : $f(x)=0$

f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[0;\pi]$

$f(0)=1>0$ و $f(\pi)=-1-\pi<0$ اذن : $f(0)\times f(\pi)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال I

نتيجة 2: إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال $[a;b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$.

مثال: بين أن المعادلة التالية تقبل حلا وحيدا في المجال I :

$x^3+2x+1=0$ ، $I=[-1;0]$

الجواب : نضع: $f(x)=x^3+2x+1$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[-1;0]$

$f(0)=1>0$ و $f(-1)=-2<0$ اذن : $f(0)\times f(-1)<0$

$f'(x)=(x^3+2x+1)'=3x^2+2>0$ ومنه f دالة متصلة تزايدية قطعا على المجال $I=[-1;0]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

تمرين7: بين أن المعادلات التالية تقبل حلا وحيدا في المجال I في الحالات التالية :

1. $x^4+2x-3=0$ ، $I=\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$
2. $2x^3+3x+20=0$ ، $I=[-2;-1]$

الجواب (1: نضع: $f(x)=x^4+2x-3$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{31}{16}<0$ و $f(\sqrt{2})=1+\sqrt{2}>0$ اذن : $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(\sqrt{2})<0$

$f'(x)=(x^4+2x-3)'=4x^3+2>0$ لأن : $x\in\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

ومنه f دالة متصلة تزايدية قطعا على المجال $I=\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

2) نضع : $f(x)=2x^3+3x+20$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

f دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على : $I=[-2;-1]$

$f(-1)=15>0$ و $f(-2)=-2<0$ اذن : $f(-2)\times f(-1)<0$

$f'(x)=(2x^3+3x+20)'=6x^2+3>0$

ومنه f دالة متصلة تزايدية قطعا على المجال $I=[-2;-1]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

III. العمليات على الدوال المتصلة:

خاصية1: ليكن I مجالا ضمن المجموعة $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I فان الدوال $f+g$ و $f\times g$ و $k\times f$ دوال متصلة على I
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I و g لا تنعدم على I فان : $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتين متصلتان على المجال I

خاصية2: لتكن f و g دالتين عدديتين

إذا كانت f دالة متصلة على المجال I و g دالة متصلة على المجال J بحيث $f(I)\subset J$

فان الدالة : gof متصلة على المجال I

مثال: أدرس اتصال الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

1) $h(x)=x^3-x+1+\sin x$

2) $h(x)=\sin(x^3-x+1)$

أجوبة: 1) h هي مجموع دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ اذن هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$

2) h هي مركب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ اذن هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$f(x)=x^3-x+1$ و $g(x)=\sin x$ $\quad h=gof$

IV. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال

خاصية1: إذا كانت f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على المجال I فان الدالة f تقبل دالة عكسية

نرمز لها بالرمز f^{-1} و معرفة على $J=f(I)$ تحقق :

$\begin{cases}f(y)=x\\ y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\ x\in f(I)\end{cases}$ و $\forall x\in f(I)\ (f\circ f^{-1})(x)=x$

و $\forall y\in I\ (f^{-1}\circ f)(y)=y$

مثال: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

1. أدرس تغيرات الدالة f وحدد جدول تغيرات
2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I=]-2;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

أجوبة: 1) $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}$

$x+2=0$ يعني $x=-2$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$f(x)=\frac{x-3}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x-3}{x+2}\right)'=\frac{(x-3)'(x+2)-(x-3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{1(x+2)-1\times(x-3)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}>0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

2) g هي قصور الدالة f على المجال $I=]-2;+\infty[$ ومن g دالة متصلة على المجال $I=]-2;+\infty[$

g تزايدية قطعا على المجال $I=]-2;+\infty[$

ومنه g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على

المجال: $J=f(I)=f(]-2;+\infty[)=]-\infty;1[$

3) $\begin{cases}y=g^{-1}(x)\\ x\in f(I)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(y)=x\\ y\in I\end{cases}$

$\begin{cases}g(y)=x\\ y\in]-2;+\infty[\end{cases}$ يعني $\frac{y-3}{y+2}=x$ يعني $y-3=x(y+2)$

يعني $y-xy=2x+3$ يعني $y(1-x)=2x+3$

يعني $y=\frac{2x+3}{1-x}$ ومنه : $g^{-1}(x)=\frac{2x+3}{1-x}$

ومنه : $g^{-1}:]-\infty;1[\to]-2;+\infty[$

$x\to g^{-1}(x)=\frac{2x+3}{1-x}$........

تمرين8: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{3x+2}{x+1}$

أو ($f(x)=\frac{x-1}{2x+1}$ و $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$)

1. أدرس الدالة f وحدد جدول تغيرات f
2. بين أن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I=]-1;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

خاصية2: إذا كانت f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على المجال I و f^{-1} دالتها العكسية فان:

- f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$
- f^{-1} رتيبة قطعا على المجال $f(I)$ ولها نفس رتابة الدالة f

منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم: $y=x$ في معلم متعامد ممنظم

مثال: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{2x-1}$

1. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
2. حدد الدالة العكسية f^{-1} للدالة f لكل x من J
3. أرسم المنحنى الممثل (C_f) للدالة f و المنحنى $(C_{f^{-1}})$ الممثل للدالة f^{-1} في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

أجوبة 1): $D_f=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=I$

f دالة متصلة على المجال $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$f'(x)=\left(\sqrt{2x-1}\right)'=\frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0$$

f تزايدية قطعا على المجال $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

x	$1/2$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

ومنه f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال:

$$J=f(I)=f\left(\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right)=[0;+\infty[$$

2) $\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\x\in f(I)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=x\\y\in I\end{cases}$

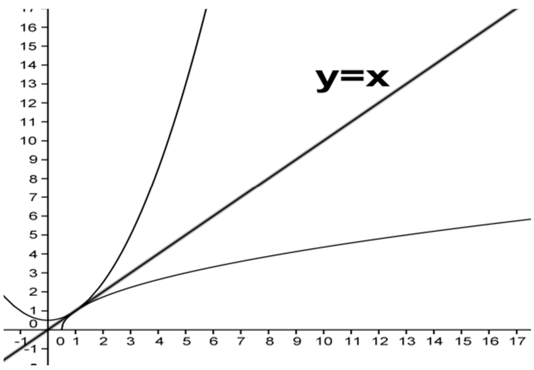
$\begin{cases}f(y)=x\\y\in[0;+\infty[\end{cases}$ يعني $\sqrt{2y-1}=x$ يعني $2y-1=x^2$

يعني $2y=x^2+1$ يعني $y=\frac{x^2+1}{2}$ ومنه : $f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}$

ومنه : $f^{-1}:[0;+\infty[\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$........x\to f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}$

3) منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم : $y=x$ في معلم متعامد ممنظم



تمرين9: لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$

ولتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0;+\infty[$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
3. حدد الدالة العكسية g^{-1} للدالة f لكل x من J

الجواب :

1) نحدد مجموعة تعريف الدالة f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1+x^2\neq0\}$

$1+x^2=0$ يعني $x^2=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}$

2) f دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

اذن g متصلة على : $I=[0;+\infty[$

$$g'(x)=\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{(x^2)'\times(x^2+1)-(x^2)\times(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$\forall x\in[0;+\infty[\quad g'(x)=\frac{2x\times(x^2+1)-(x^2)\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}\geq0$$

g تزايدية قطعا على المجال $I=[0;+\infty[$

وبالتالي g تقبل دالة عكسية g^{-1}

معرفة على مجال: $J=f(I)=g([0;+\infty[)=[0;1[$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

3) $\begin{cases}y=g^{-1}(x)\\x\in g(I)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(y)=x\\y\in I\end{cases}$

$\begin{cases}f(y)=x\\y\in[0;1[\end{cases}$ يعني $\frac{y^2}{1+y^2}=x$ يعني $x(y^2+1)=y^2$

يعني $xy^2-y^2=-x$ يعني $y^2(x-1)=-x$ يعني $y^2=\frac{-x}{x-1}=\frac{x}{1-x}$

يعني $y=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ أو $y=-\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ وبما أننا نعلم أن : $y\in[0;1[$

اذن : y موجب ومنه : $y=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ومنه : $g^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

ومنه : $g^{-1}:[0;1[\to[0;+\infty[$

$........x\to g^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

V. دالة الجذر من الرتبة n :

1. نتيجة:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

الدالة : $f:x\to x^n$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0;+\infty[$

و $f(0)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

إذن تقبل دالة عكسية تسمى دالة الجذر من الرتبة n

و نرمز لها بالرمز : $\sqrt[n]{\ }$

العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x

ولدينا : $\begin{cases}x^n=y\\x\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\sqrt[n]{x}\\y\geq0\end{cases}$

2. خصائص: $n\in\mathbb{N}^*$ و $m\in\mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$ $\quad x\in\mathbb{R}^+$ و $y\in\mathbb{R}^+$
- $\sqrt[n]{x}\geq\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x\geq y$ $\quad x\in\mathbb{R}^+$ و $y\in\mathbb{R}^+$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$ $\quad x\in\mathbb{R}^+$
- $\sqrt[n]{x\times y}=\sqrt[n]{x}\times\sqrt[n]{y}$ $\quad x\in\mathbb{R}^+$ و $y\in\mathbb{R}^+$
- $\sqrt[n]{\frac{1}{y}}=\frac{1}{\sqrt[n]{y}}$ $\quad y\in\mathbb{R}^{+*}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $\quad y\in\mathbb{R}^{+*}$ و $x\in\mathbb{R}^+$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[n\times m]{x}$ $\quad x\in\mathbb{R}^+$
- $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$ $\quad x\in\mathbb{R}^+$

أمثلة:

1)أحسب وبسط التعابير التالية :

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ و $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

$$A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} \qquad B=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$C=\frac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} \qquad D=\sqrt[6]{\frac{2^5\times 128000000}{27^2}}$$

2) قارن : $\sqrt[5]{2}$ و $\sqrt[7]{3}$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

أ) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ ب) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

4) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[5]{x^3+24}$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

أجوبة :

1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$ و $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[2\times4]{2}=\sqrt[8]{2}$

$$A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[5]{2^5}-2+\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^9}}+\sqrt[4]{\frac{96}{3}}=2-2+\sqrt[9]{2^9}+\sqrt[5]{32}$$

$$A=2-2+2+2=4$$

$$B=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}=\frac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2^4}\times\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$B=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{4}{5}}\times2^{\frac{2}{6}}\times2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{4}{5}}\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=\frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=2^{\frac{23}{15}-\frac{8}{15}}=2^{\frac{15}{15}}=2$$

$$C=\frac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\frac{\left(3^3\right)^{\frac{2}{9}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^2\right)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\frac{3^{\frac{2}{3}}\times3^1\times3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$C=\frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}}=3^{\frac{20}{3}-\frac{17}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3^1=3$$

$$D=\sqrt[6]{\frac{2^5\times128000000}{27^2}}=\sqrt[6]{\frac{2^5\times2^7\times10^6}{\left(3^3\right)^2}}=\sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6}\times2^{12}}=\sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6}}\times\sqrt[6]{\left(2^2\right)^6}$$

$$D=\sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6}\times\sqrt[6]{\left(2^2\right)^6}=\frac{10}{3}\times2^2=\frac{40}{3}$$

2) مقارنة : $\sqrt[5]{2}$ و $\sqrt[7]{3}$ نطبق القاعدة : $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[7]{3}=\sqrt[7\times5]{3^5}=\sqrt[35]{243}$ و $\sqrt[5]{2}=\sqrt[7\times5]{2^7}=\sqrt[35]{128}$

لدينا : $\sqrt[35]{243}>\sqrt[35]{128}$ **لأن :** $243>128$ **ومنه :** $\sqrt[7]{3}>\sqrt[5]{2}$

3) أ) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ يعني $\left(\sqrt[5]{3x-4}\right)^5=(2)^5$

يعني $3x-4=32$ يعني $3x=36$ يعني $x=12$ **ومنه :** $S=\{12\}$

ب) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$ **نضع** $\sqrt[5]{x}=X$

المعادلة تصبح : $X^2-5X+6=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=-5$ و $c=6$

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{5+1}{2\times1}=\frac{6}{2}=3$ **و** $x_2=\frac{5-1}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$

ومنه: $\sqrt[5]{x}=2$ أو $\sqrt[5]{x}=3$ يعني $\left(\sqrt[5]{x}\right)^5=(2)^5$ أو

$\left(\sqrt[5]{x}\right)^5=(3)^5$

يعني $x=32$ أو $x=243$ **ومنه :** $S=\{32;243\}$

4) $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[5]{x^3+24}=\sqrt[5]{2^3+24}=\sqrt[5]{8+24}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$$

نحتفظ بأكبر درجة فقط

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)''$ ش غ م

نعلم أن : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

اذن :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$$

تمرين10: 1)أحسب وبسط:

$$A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$$

2) قارن : $\sqrt[5]{4}$ و $\sqrt[4]{3}$

3) قارن : $\sqrt[3]{28}$ و $\sqrt{13}$ وقارن: $\sqrt[5]{23}$ و $\sqrt[15]{151}$

أجوبة :

(1

$$A=\frac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}=\frac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt[5]{2^{10}\times10^5}}{\sqrt[4]{2^6}\times\sqrt[3]{\sqrt{2^8}}\times\sqrt{2\times3^2}}=\frac{2^{\frac{10}{3}}\times2\times10}{2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{4}{3}}\times3\times2^{\frac{1}{2}}}=20$$

2)أ) مقارنة : $\sqrt[5]{4}$ و $\sqrt[4]{3}$

نطبق القاعدة : $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[5]{4}=\sqrt[4\times5]{4^4}=\sqrt[20]{4096}$ و $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\times5]{3^5}=\sqrt[20]{243}$

لدينا : $\sqrt[20]{406}>\sqrt[20]{243}$ **لأن :** $406>243$ **ومنه :** $\sqrt[5]{4}>\sqrt[4]{3}$

ب)مقارنة : $\sqrt[3]{28}$ و $\sqrt{13}$

نطبق القاعدة : $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt{13}=\sqrt[2]{13}=\sqrt[2\times3]{13^3}=\sqrt[6]{2197}$ و $\sqrt[3]{28}=\sqrt[6]{28^2}=\sqrt[6]{784}$

لدينا : $\sqrt[6]{2197}>\sqrt[6]{784}$ **لأن :** $2197>784$ **ومنه :**

$\sqrt{13}>\sqrt[3]{28}$

ج)مقارنة : $\sqrt[5]{23}$ و $\sqrt[15]{151}$

$\sqrt[5]{23}=\sqrt[15]{23^3}=\sqrt[15]{12167}$ **و منه** $\sqrt[5]{23}>\sqrt[15]{151}$

VI. *القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا :*

- ***تعريف :*** ليكن $x\in\mathbb{R}^{+*}$ و $r=\frac{m}{n}$ عددا جذريا غير منعدم

$(n\in\mathbb{N}^*$ و $m\in\mathbb{Z})$

نسمي القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r العدد الذي نرمز له بالرمز x^r والمعرف بما لي : $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$

- **حالة خاصة :** $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $\quad x \in \mathbb{R}^+ \quad n \in \mathbb{N}^*$
- **نتائج وخصائص :** $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ و $\forall y \in \mathbb{R}^{+*}$ و $\forall r' \in \mathbb{Q}^*$ و $\forall r \in \mathbb{Q}^*$

$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ و $x^r \times y^r = (x \times y)^r$ و $\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$

$\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$ و $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$ و $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

مثال 1: $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

مثال 2: $2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$

تمرين11: 1)أحسب وبسط التعابير التالية :

$A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times \left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}$ و $B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

أ) $\sqrt[3]{x-1} = 3$ $\quad$ ب) $x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$

3) أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1}$ و $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$ و $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$

أجوبة :1)

$$A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times \left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}} = \frac{\left(3^5\right)^{\frac{1}{15}} \times \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^3}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{8}{3}-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{37}{15}} = \left(\sqrt[15]{3}\right)^{37}$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}} = \frac{\left(3^2\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(3^4\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{4}{5}} \times (3)^{-\frac{1}{8}} = 3^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}-\frac{1}{8}} = 3^{\frac{11}{8}-\frac{4}{5}} = 3^{\frac{55}{40}-\frac{32}{40}} = 3^{\frac{23}{40}}$$

$$B = 3^{\frac{23}{40}} = \sqrt[40]{3^{23}}$$

2) أ) $\sqrt[3]{x-1} = 3$ يعني $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 = 3^3$ يعني $x - 1 = 27$

يعني $x = 28$ ومنه : $S = \{28\}$

ب) $x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$ يعني $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$

نضع $x^{\frac{1}{3}} = X$ المعادلة تصبح : $X^2 - 7X - 8 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a = 1$ و $b = -7$ و $c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81 > 0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{7+9}{2 \times 1} = \frac{16}{2} = 8$ **و** $x_2 = \frac{7-9}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$

ومنه: $x^{\frac{1}{3}} = 8$ **أو** $x^{\frac{1}{3}} = -1$

المعادلة: $x^{\frac{1}{3}} = -1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

اذن نأخذ فقط $x^{\frac{1}{3}} = 8$ تعني $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (8)^3$ تعني $x = 512$

ومنه : $S = \{512\}$

3) أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$ نعلم أن : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

اذن :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 1^3\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)} = \frac{1}{1 + 1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1} - 1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - (1)^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right) = 1 \times 3 = 3$$

تمرين12: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

(1 $x^5 = 32$ $\quad$ **(2** $x^7 = -128$

(3 $x^4 = 3$ $\quad$ **(4** $x^6 = -8$

الأجوبة : 1) $x^5 = 32$ **اذن:** $x > 0$

ومنه : $x = \sqrt[5]{32}$ **يعني** $x = \sqrt[5]{2^5}$ **يعني** $x = 2$ **ومنه :** $S = \{2\}$

(2 $x^7 = -128$ **اذن:** $x < 0$

ومنه : $x = -\sqrt[7]{128}$ **يعني** $x = -\sqrt[7]{2^7}$ **يعني** $x = -2$ **ومنه :**

$S = \{-2\}$

(3 $x^4 = 3$ **يعني** $x = \sqrt[4]{3}$ **أو** $x = -\sqrt[4]{3}$ **ومنه :**

$S = \left\{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\right\}$

(4 $x^6 = -8$ **و** $-8 < 0$ **و** $x^6 \geq 0$ **ومنه :** $S = \Phi$