

# الهندسة الفضائية

## التمرين 1

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   
نعتبر النقط  $A(2,0,0)$  و  $B(2,2,2)$  و  $C(0,0,2)$  و  $I(2,1,2)$  و  $J(0,-1,0)$

- (1) حدد مثلث إحداثيات  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
- (2) استنتج أن معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$   $x - y + z - 2 = 0$
- (3) تأكد أن المستقيم  $(IJ)$  عمودي على المستوى  $(ABC)$
- (4) لتكن  $(S)$  الفلكة التي مركزها  $I$  و المماسة للمستوى  $(ABC)$   
أ. حدد معادلة ديكارتية للفلكة  $(S)$   
ب. حدد مثلث إحداثيات نقطة تماس الفلكة  $(S)$  و المستوى  $(ABC)$

التصحيح

(1) لدينا :  $\overrightarrow{AB}(0,2,2)$  و  $\overrightarrow{AC}(-2,2,2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \quad \text{إذن}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} \quad \text{ومنه}$$

(2) لدينا  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  متجهة منتظمة للمستوى  $(ABC)$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  تكتب على شكل :  $4x + 4y + 4z + d = 0$

و بما أن  $A(2,0,0) \in (ABC)$  فإن :  $4(2) + 4(0) + 4(0) + d = 0$  و منه  $d = -8$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$  تكتب على شكل :  $4x + 4y + 4z - 8 = 0$

و منه نستنتج أن :  $x + y + z - 2 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوى  $(ABC)$

3) لدينا  $\vec{IJ}(-2, -2, -2)$  متجهة موجهة للمستقيم  $(IJ)$  و لدينا  $\vec{AB}(4, 4, 4)$  متجهة منظمة للمستوى  $(ABC)$

و نلاحظ أن :  $\vec{IJ} = \frac{-1}{2}\vec{AB}$  إذن  $\vec{IJ}$  و  $\vec{AB}$  مستقيمتان

و منه  $\vec{IJ}$  هي أيضا متجهة منظمة للمستوى  $(ABC)$

و بالتالي المستقيم  $(IJ)$  عمودي على المستوى  $(ABC)$

4) أ. لدينا  $(S)$  الفلكة التي مركزها  $I(2, 1, 2)$  و المماسة للمستوى  $(ABC)$

إذن شعاع الفلكة  $(S)$  يساوي  $d(I, (ABC))$

لنحسب  $d(I, (ABC))$  :

$$d(I, (ABC)) = \frac{|(2) + (1) + (2) - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

و منه  $(S)$  الفلكة التي مركزها  $I(2, 1, 2)$  و شعاعها  $r = \sqrt{3}$

إذن معادلة ديكارتية للفلكة  $(S)$  تكتب على شكل :  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = (\sqrt{3})^2$

ب. ليكن  $(\Delta)$  المستقيم المار من النقطة  $I(2, 1, 2)$  و العمودي على المستوى  $(ABC)$

و بما أن  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(4, 4, 4)$  متجهة منظمة للمستوى  $(ABC)$  فإن  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(4, 4, 4)$  هي أيضا

متجهة موجهة للمستقيم  $(\Delta)$ .

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{إذن تمثيل بارامتري للمستقيم } (\Delta) \text{ يكتب على شكل :}$$

لتكن  $H(x_H, y_H, z_H)$  نقطة تماس الفلكة  $(S)$  و المستوى  $(ABC)$

$$\begin{cases} x_H = 2 + 4t \\ y_H = 1 + 4t \\ z_H = 2 + 4t \\ x_H + y_H + z_H - 2 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (S)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H = 2 + 4t \\ y_H = 1 + 4t \\ z_H = 2 + 4t \\ (2 + 4t) + (1 + 4t) + (2 + 4t) - 2 = 0 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H = 2 + 4t \\ y_H = 1 + 4t \\ z_H = 2 + 4t \\ t = \frac{-1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_H = 1 \\ y_H = 0 \\ z_H = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

و بالتالي النقطة  $H(1,0,1)$  هي نقطة تماس الفلكة  $(S)$  و المستوى  $(ABC)$