.01

نحدد الدوال الأصلية للدالة f

رقم	دالة f	دوال الأصلية F للدالة f مع $c\in\mathbb{R}$	حيز تعريفها
1	$f(x)=8x^7-12x^4-14x^3-6x+5$	$F(x)=x^8-\frac{12}{5}x^4-\frac{7}{2}x^3-3x+5x+c$	$\mathbb{R}$
2	$f(x)=-4x^5+\frac{2}{x^2}+3$	$F(x)=-\frac{2}{3}x^6-\frac{2}{x}+3x+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
3	$f(x)=(x+8)^2+1$ $=(x+8)'(x+8)^2+1$	$F(x)=\frac{1}{3}(x+8)^3+3x+c$	$\mathbb{R}$
4	$f(x)=(11x+1)^5-2x$ $=\frac{1}{11}(11x+1)'(11x+1)^5-2x$	$F(x)=\frac{1}{11}\times\frac{1}{6}(11x+1)^6-x^2+c$	$\mathbb{R}$
5	$f(x)=(2x^3-9)^2+7x^2$ $=4x^6-36x^3+81$	$F(x)=\frac{4}{7}x^7-9x^4+81x+c$	$\mathbb{R}$
6	$f(x)=\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{5}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x)=\frac{5}{2}\times\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
7	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+4}}=\frac{(2x+4)'}{2\times\sqrt{2x+4}}$	$F(x)=\sqrt{2x+4}$	$]-2;+\infty[$
8	$f(x)=\frac{x^7}{\sqrt{x^8+1}}$ $=\frac{1}{8}(x^8+1)'(x^8+1)^{-\frac{1}{2}}$	$F(x)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x^8+1)^{-\frac{1}{2}+1}+c$ $=\frac{1}{4}\sqrt{x^8+1}+c$	$\mathbb{R}$
9	$f(x)=\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$	$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+c$ $=\frac{4}{5}\times\sqrt[4]{x^5}+c$	$\mathbb{R}^+$
10	$f(x)=\sqrt[3]{x^5}=x^{\frac{5}{3}}$	$F(x)=\frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1}+c$ $=\frac{3}{8}\times\sqrt[3]{x^8}+c$	$\mathbb{R}^+$
11	$f(x)=\sqrt[3]{2x-8}$ $=\frac{1}{2}(2x-8)'(2x-8)^3$	$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}(2x-8)^4+c$ $=\frac{1}{8}(2x-8)^4+c$	$]4;+\infty[$

12	$f(x)=x^7.\sqrt{5x^8-7}$ $=\frac{1}{5}(5x^8-7)'(5x^8-7)^{\frac{1}{2}}$	$F(x)=\frac{1}{5}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(5x^8-7)^{\frac{1}{2}+1}+c$ $=\frac{2}{15}(5x^8-7)^{\frac{3}{2}}+c$ $=\frac{2}{15}\sqrt{(5x^8-7)^3}+c$	
13	$f(x)=3\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)-5\cos(2x-\pi)$	$F(x)=-\frac{3}{4}\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)-5\times\frac{1}{2}\sin(2x-\pi)+c$	$\mathbb{R}$
14	$f(x)=3x^4\sin x^5=3\times\frac{1}{5}(x^5)'\sin x^5$	$F(x)=-3\times\frac{1}{5}\cos x^5+c$	$\mathbb{R}$
15	$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=(\tan x)'$	$F(x)=\tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
16	$f(x)=\sin x\cos^3 x=-(\cos x)'\cos^3 x$	$f(x)=-\frac{1}{4}\cos^4 x+c$	$\mathbb{R}$
17	$f(x)=\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^8}$ $=(x^2-5x+6)'(x^2-5x+6)^8$	$F(x)=\frac{1}{9}(x^2-5x+6)^9+c$	$]3;+\infty[$ أو $]2;3[$ أو $]-\infty;2[$
18	$f(x)=\frac{\sin x}{\cos^5 x}=-(\cos x)'\cos^{-5}x$	$f(x)=-4\cos^{-4}x+c=\frac{-4}{\cos^4 x}+c$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
19	$f(x)=\frac{x^7-3x^2-5}{x^2}=x^5-3-\frac{5}{x^2}$	$F(x)=\frac{1}{6}x^6-3X+\frac{5}{x}+c$	$]0,+\infty[$ أو $]-\infty;0[$

.02

.01 نحدد الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

لدينا:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$
$$=\sqrt{x-1}+2\times\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}$$
$$=(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}+2\times\frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}$$

و منه :

$$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}+2\times\sqrt{x-1}+c$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\times\sqrt{x-1}+c$$

خلاصة : الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ هي على شكل $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\times\sqrt{x-1}+c$.

03.

01. هل الدالتين $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ و $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ أصليتين لنفس الدالة $f(x)$ ؟

نعتبر $G(x)$ دالة أصلية ل $f(x)$

لدينا:

$F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2=\frac{1}{6}(9x^2+24x+16)=\frac{3}{2}x^2+4x+\frac{4}{3}=G(x)+\frac{4}{3}$ ومنه $F(x)=G(x)$

ومنه : $F(x)=G(x)+\frac{4}{3}$ إذن $F(x)$ دالة أصلية ل $f(x)$.

خلاصة : الدالتين $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^2$ و $G(x)=\frac{3}{2}x^2+4x$ أصليتين لنفس الدالة $f(x)$

04.

01. F دالة أصلية ل f حدد $f(x)$.

أ- $F(x)=3x^4-2x+5$.

F دالة أصلية ل f و منه : $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow(3x^4-2x+5)'=f(x)$
$\Leftrightarrow 12x^3-2=f(x)$

خلاصة : $f(x)=12x^3-2$.

ب- $F(x)=-x+\frac{3}{x}$.

F دالة أصلية ل f و منه : $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\left(-x+\frac{3}{x}\right)'=f(x)$
$\Leftrightarrow -1-\frac{3}{x^2}=f(x)$

خلاصة : $f(x)=-1-\frac{3}{x^2}$.

ج- $F(x)=5\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$.

F دالة أصلية ل f و منه : $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\left(5\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)'=f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} - 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^3}} = f(x)$$

خلاصة : $f(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

د - $F(x) = 2\sin(3x) + 7\cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$.

F دالة أصلية ل f و منه : $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left(2\sin(3x)+7\cos\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)\right)' = f(x)$

$$\Leftrightarrow 6\cos(3x) - 35\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

خلاصة : $f(x) = 6\cos(3x) - 35\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$.

.05

.01 لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $G(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{5}$. حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في -1 .

الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{x^2} - 7$ هي على شكل : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x + c$

من جهة أخرى : $F(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{12}(-1)^3 - \frac{3}{-1} - 7(-1) + c = 0$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{119}{12}$$

و بالتالي : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x - \frac{119}{12}$.

خلاصة : حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في -1 هي : $F(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{x} - 7x - \frac{119}{12}$.

.02 لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ب : $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x$. حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و $F(0) = 1$.

الدوال الأصلية لدالة التالية : $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x$ هي على شكل : $F(x) = \tan x + \sin x + c$

من جهة أخرى : $F(0) = 1 \Leftrightarrow \tan 0 + \sin 0 + c = 1$

$$\Leftrightarrow c = 1$$

و بالتالي : $F(x) = \tan x + \sin x + 1$.

خلاصة : حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في -1 هي $F(x) = \tan x + \sin x + 1$.

.06

.01 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ب : $f(x)=\dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

أ- نحدد a و b من $\mathbb{R}$ حيث: $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$.

لدينا :

$$f(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(x+1)^3}\Leftrightarrow \frac{3x+4}{(x+1)^3}=\frac{a(x+1)+b}{(x+1)^3}=\frac{ax+a+b}{(x+1)^3}$$

ومنه : $a=3$ و $a+b=4$ أي $a=3$ و $b=1$.

خلاصة : $a=3$ و $b=1$ و $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}$

طريقة 2 :

لدينا :

$$f(x)=\frac{3x+4}{(x+1)^3}=\frac{3x+3+1}{(x+1)^3}=\frac{3x+3}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{3(x+1)}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}$$

خلاصة : $a=3$ و $b=1$ و $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}$

أ- نستنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$.

لدينا : $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}=3(x+1)'(x+1)^{-2}+(x+1)'(x+1)^{-3}$

إذن : دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي : $F(x)=-3(x+1)^{-1}-\dfrac{1}{2}(x+1)^{-2}=-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$.

خلاصة : دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$ هي : $F(x)=-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

.07

.01 لنعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=(\sin^2 x-3\sin x+8)\cos x$ حدد الدالة الأصلية F المعرفة على $\mathbb{R}$ و $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$.

نحدد الدالة الأصلية F المعرفة على $\mathbb{R}$ و $F\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=0$.

لدينا :

$$f(x)=\left(\sin^2 x-3\sin x+8\right)\cos x$$
$$=\cos x\sin^2 x-3\cos x\sin x+8\cos x$$
$$=(\sin x)'\sin^2 x-3(\sin x)'\sin x+8\cos x$$

و منه : الدوال الأصلية لدالة f هي : $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-3\times\frac{1}{2}\sin^2 x+8\sin x+c$

من جهة أخرى : $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}\right)-3\times\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)+8\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+c=0$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}(-1)^3-3\times\frac{1}{2}(-1)^2+8(-1)+c=0$$
$$\Leftrightarrow c=-\frac{59}{6}$$

ومنه : $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-3\times\frac{1}{2}\sin^2 x+8\sin x-\frac{59}{6}$

خلاصة : الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ خيث : $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ هي : $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-3\times\frac{1}{2}\sin^2 x+8\sin x-\frac{59}{6}$.