الأعداد العقدية

السلسلة 1 (6 تمارين)

التمين 1:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{w}$ التي لحقها $z_{\vec{w}}=\left(2-\sqrt{2}\right)+i\left(2-\sqrt{6}\right)$. نعتبر النقطة A التي لحقها $a=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

1) **اعط الكتابة العقدية للإزاحة t**
2) **حدد b لحق النقطة B صورة النقطة A بالإزاحة t**
3) **نضع $c=\frac{a}{b}$. أكتب a و b و c على شكلها المثلثي**
4) **أكتب العدد c على شكله الجبري**
5) **استنتج القيم المضبوطة ل $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$**
6) **أكتب c^{2007} على الشكل الجبري.**

التمرين 2:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة $1cm$). نعتبر النقط A و B و S و Ω التي ألحاقها على التوالي : $a=-2+4i$ و $b=-4+2i$ و $s=-5+5i$ و $\omega=-2+2i$
و ليكن h التحاكي الذي مركزه S و نسبته 3
و لتكن C صورة A بالتحاكي h و D صورة B بالتحاكي h

1) **أ. اعط الكتابة العقدية للتحاكي h**
   ب. بين أن $c=4+2i$ هو لحق النقطة C و أن $d=-2-4i$ هو لحق النقطة D
   ج. بين أن النقط A و B و C و D متداورة
2) **لتكن P منتصف القطعة $[AC]$**
   أ. حدد p لحق النقطة P
   ب. بين أن $\frac{\omega-p}{b-d}=\frac{1}{2}i$ و استنتج أن $DB=2P\Omega$ و أن $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{P\Omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

التمرين 3:

1) **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$**
2) **في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي :**
   $z_A=2+2i$ و $z_B=2-2i$ و $z_C=4$
   أ. حدد معيار و عمدة كل من العددين العقديين z_A و z_B

ب.بين أن المثلث OAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في O
ج.بين أن الرباعي $OBCA$ مربع
د.لتكن E منتصف القطعة $[OA]$ و لتكن D نقطة لحقها z_D حيث $z_D = iz_A$
بين أن E هي منتصف القطعة $[CD]$

التمرين 4:

نعتبر المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) أ. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=2$ و $b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$. حدد قياسا للزاوية $A\widehat{B}C$
ب. استنتج ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هو $1+i\sqrt{3}$

2) نرمز ب (z_n) المتتالية المعرفة ب :
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

و نضع A_n النقطة التي لحقها z_n

أ. بين أن النقط A_2 و A_3 و A_4 هي النقط التي ألحاقها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ و $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$
لاحظ أن $A_1 = A$ و $A_2 = B$ و $A_4 = C$
ب. قارن أطوال القطع $[A_1A_2]$ و $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$
ج. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$
د. استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يتم تحديد طبيعته و عناصره المميزة
ه. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6} = A_n$ ثم حدد لحق A_{2012}
و. حدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$

التمرين 5:

I. نعتبر العدد العقدي $U = 2+\sqrt{3}+i$

1. بين أن معيار العدد U هو $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

2. تحقق من أن $U = 2\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) + i\,2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

3. أ) بإخطاط $\cos^2(\theta)$ بين أن : $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$

ب) بين أن $U = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (نذكر أن $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$)
ثم أكتب العدد U على شكله المثلثي

ج) بين أن : $U^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$

II. **نعتبر في المستوى العقدي النقطتين Ω و P اللذين لحقاهما $\omega=\sqrt{3}$ و U و ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2**

1. **بين أن d لحق النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هو $\left(4+\sqrt{3}\right)+2i$**
2. **حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $\left|z-4-\sqrt{3}-2i\right|=\left|U\right|$**

التمرين 6:

المستوى العقديمنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

و لتكن A و B النقطتين اللتسن لحقاهما $a=i$ و $b=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1. **ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن C صورة B بالدوران r**
   - **أ) اعط الكتابة العقدية للدوران r ثم أكتب c لحق النقطة C على شكله الأسي**
   - **ب) أكتب كلا من b و c على الشكل الجبري**
2. **لتكن D مرجح النقط المتزنة $\left(A,2\right)$ و $\left(B,-1\right)$ و $\left(C,2\right)$**
   - **أ) حدد d لحق النقطة D**
   - **ب) بين أن النقط A و B و C و D متداورة**
3. **ليكن h التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 و لتكن E صورة النقطة D بالتحاكي h**
   اعط الكتابة العقدية للتحاكي h ثم حدد e لحق النقطة E
4. **أ) أحسب $\frac{d-c}{e-c}$ و أكتبها على شكلها الأسي**
   - **ب) استنتج طبيعة المثلث CDE**